# EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**
**Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa ajustado**

Duração da prova: 120 minutos
**2000**

1.ª FASE
1.ª CHAMADA
VERSÃO 1

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

# VERSÃO 1

**Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.**

V.S.F.F.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

## Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

**1.** Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

**(A)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = 0$

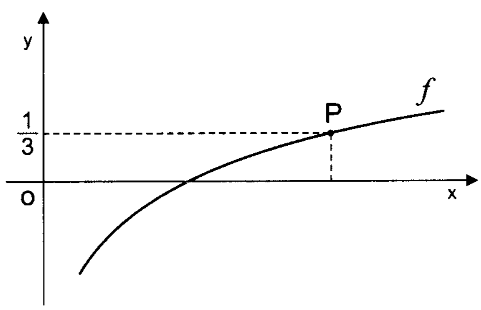
**(B)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = +\infty$

**(C)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = 1$

**(D)** Não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

**2.** Na figura está parte da representação gráfica da função $f$, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_8 x$

$P$ é um ponto do gráfico de $f$, que tem ordenada $\frac{1}{3}$



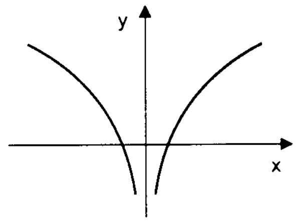

Qual é a abcissa do ponto $P$ ?

**(A)** $\frac{8}{3}$ **(B)** $1$ **(C)** $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$ **(D)** $2$

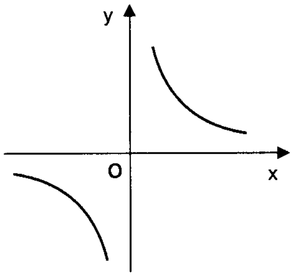
**V.S.F.F.**

**3.** Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função $g$, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

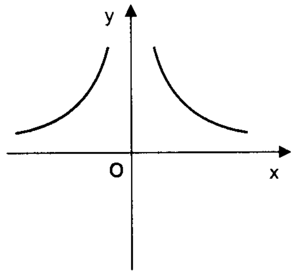
Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função $g'$, **derivada** de $g$ ?



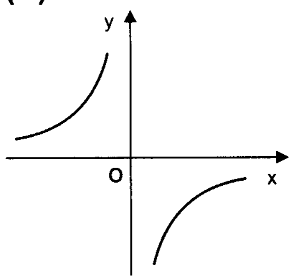

**(A)**



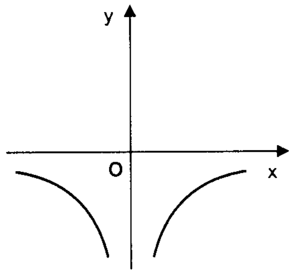

**(B)**




**(C)**




**(D)**




**4.** Um tanque tem a forma de um paralelepípedo rectângulo, com $7\ m$ de comprimento, $5\ m$ de largura e $4\ m$ de altura.

Admita que o tanque está vazio.

Num certo instante, é aberta uma torneira que verte água para o tanque, à taxa de $2\ m^3$ por hora, até este ficar cheio.

Qual é a função que dá a **altura**, em metros, da água no tanque, $t$ horas após a abertura da torneira?

**(A)** $h(t) = 4 - 2t \ , \ t \in [0, 70]$

**(B)** $h(t) = \frac{2t}{35} \ , \ t \in [0, 70]$

**(C)** $h(t) = 4 - 2t \ , \ t \in [0, 140]$

**(D)** $h(t) = \frac{2t}{35} \ , \ t \in [0, 140]$

**5.** Seja $A$ um acontecimento possível, cuja probabilidade é diferente de $1$.
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|A)$ ?

**(A)** $0$ **(B)** $1$ **(C)** $P(A)$ **(D)** $[P(A)]^2$

**6.** Lança-se um dado com as faces numeradas de 1 a 6.
Considere os acontecimentos:
$A$: «sair face ímpar»;
$B$: «sair face de número maior ou igual a 4».

Qual é o acontecimento **contrário** de $A \cup B$ ?

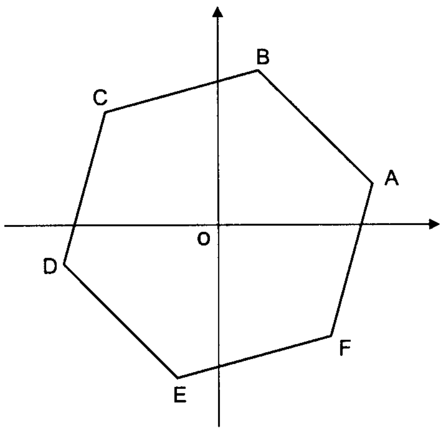
**(A)** sair a face 1 ou a face 5

**(B)** sair a face 4 ou a face 6

**(C)** sair a face 2

**(D)** sair a face 5

**7.** Na figura está representado um hexágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice $6$ de um certo número complexo.




O vértice $C$ é a imagem geométrica do número complexo

$$\sqrt{2}\ cis\ \frac{3\pi}{4}$$

Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice $D$ ?

**(A)** $\sqrt{2}\ cis\ \frac{7\pi}{6}$

**(B)** $\sqrt{2}\ cis\ \frac{13\pi}{12}$

**(C)** $\sqrt[6]{2}\ cis\ \frac{7\pi}{6}$

**(D)** $\sqrt[6]{2}\ cis\ \frac{13\pi}{12}$

**V.S.F.F.**

## Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção**: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

**1.** Seja $A$ o conjunto dos números complexos cuja imagem, no plano complexo, é o interior do círculo de centro na origem do referencial e raio $1$.

**1.1.** Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a parte de $A$ contida no segundo quadrante (excluindo os eixos do referencial).

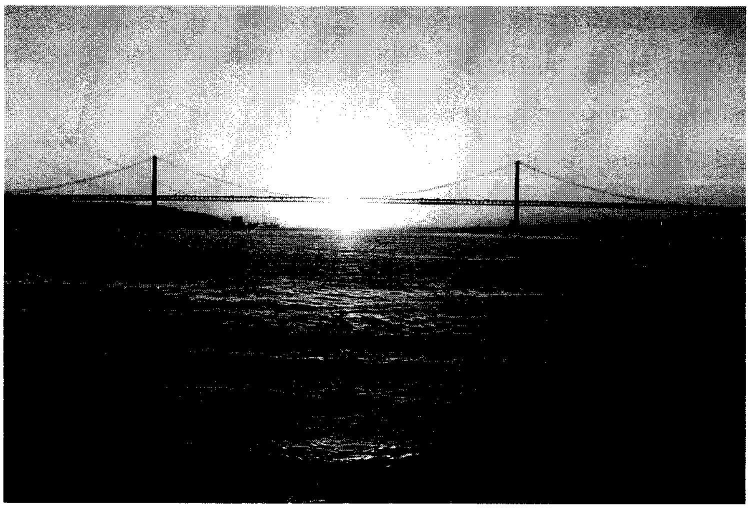
**1.2.** Sem recorrer à calculadora, mostre que o número complexo $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4\,cis\,\frac{\pi}{6}}$ pertence ao conjunto $A$.

**2.** Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x}\,(x^2 + x)$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

**2.1.** Verifique que $f\,'(x) = e^{x}\,(x^2 + 3\,x + 1)$ e determine uma equação da recta tangente ao gráfico de $f$, no ponto de abcissa $0$.

**2.2.** Estude $f$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.



**3.** No presente ano civil, em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem $n$ do ano, é dado em horas, aproximadamente, por

$$f(n) = 12{,}2 + 2{,}64 \text{ sen } \frac{\pi\,(n-81)}{183} \qquad n \in \{1, 2, 3, .........., 366\}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

**Por exemplo**: no dia 3 de Fevereiro, trigésimo quarto dia do ano, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do Sol foi de $f(34) \approx 10{,}3$ horas.

**3.1.** No dia 24 de Março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às seis e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do Sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

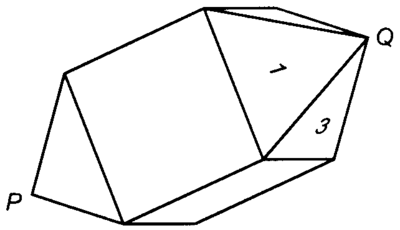
**Notas**:

- Recorde que, no presente ano, o mês de Fevereiro teve 29 dias.
- Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

**3.2.** Em alguns dias do ano, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é superior a $14{,}7$ horas. Recorrendo à sua calculadora, determine em quantos dias do ano é que isso acontece. Indique como procedeu.

**V.S.F.F.**

**4.** Na figura está representado um poliedro com doze faces, que pode ser decomposto num cubo e em duas pirâmides quadrangulares regulares.




**4.1.** Pretende-se numerar as doze faces do poliedro, com os números de 1 a 12 (um número diferente em cada face).
Como se vê na figura, duas das faces do poliedro já estão numeradas, com os números 1 e 3.

**4.1.1.** De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números?

**4.1.2.** De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números, de forma a que, nas faces de uma das pirâmides, fiquem só números ímpares e, nas faces da outra pirâmide, fiquem só números pares?

**4.2.** Considere agora o poliedro num referencial o. n. $Oxyz$, de tal forma que o vértice $P$ coincida com a origem do referencial, e o vértice $Q$ esteja no semieixo positivo $Oy$.
Escolhidos ao acaso três vértices distintos, qual é a probabilidade de estes definirem um plano paralelo ao plano de equação $y = 0$? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

**5.** Considere uma função $f$ de domínio $\mathbb{R}^+$. Admita que $f$ é positiva e que o eixo $Ox$ é assimptota do gráfico de $f$. Mostre que o gráfico da função $\frac{1}{f}$ não tem assimptota horizontal.

**FIM**

## COTAÇÕES

**Primeira Parte**......................................................................................**63**

Cada resposta certa ........................................................................ +9
Cada resposta errada......................................................................... - 3
Cada questão não respondida ou anulada ...................................... 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

**Segunda Parte** ......................................................................................**137**

**1.** ........................................................................................... 21
  **1.1.** ..............................................................................9
  **1.2.** ..............................................................................12

**2.** ........................................................................................... 33
  **2.1.** ..............................................................................15
  **2.2.** ..............................................................................18

**3.** ........................................................................................... 33
  **3.1.** ..............................................................................15
  **3.2.** ..............................................................................18

**4.** ........................................................................................... 32
  **4.1.** ..............................................................................18
    **4.1.1.** ..................................................7
    **4.1.2.** ..................................................11
  **4.2.** ..............................................................................14

**5.** ........................................................................................... 18

**TOTAL** ......................................................................................**200**

**V.S.F.F.**

# Formulário

## Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

## Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

## Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad (r - raio)$

## Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

## Complexos

$(\rho\, cis\, \theta) \,.\, (\rho'\, cis\, \theta') = \rho\, \rho'\, cis\, (\theta + \theta')$

$\frac{\rho\, cis\, \theta}{\rho'\, cis\, \theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\, cis\, (\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\, (n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

## Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' \,.\, v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \,.\, v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \,.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \,.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \,.\, e^u$

$(a^u)' = u' \,.\, a^u \,.\, \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

# EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**
**Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa ajustado**

Duração da prova: 120 minutos
2000

1.ª FASE
1.ª CHAMADA
VERSÃO 2

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

# VERSÃO 2

**Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.**

V.S.F.F.

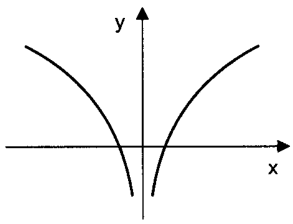
Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

## Primeira Parte

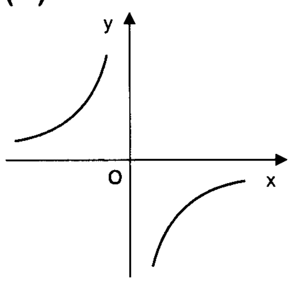
- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

**1.** Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função $g$, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

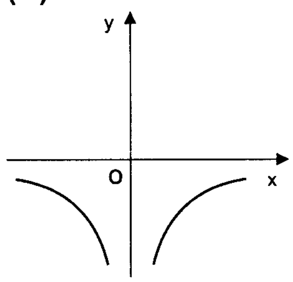
Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função $g'$, **derivada** de $g$?



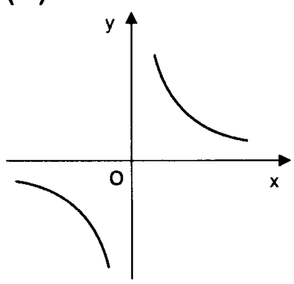

**(A)**



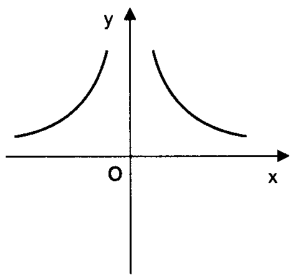

**(B)**




**(C)**




**(D)**




**V.S.F.F.**

**2.** Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

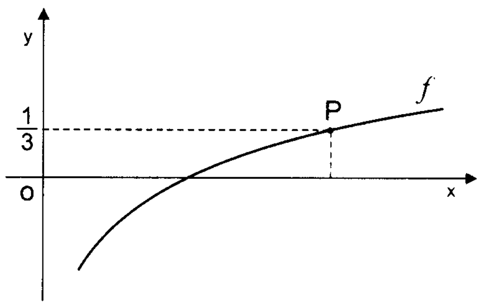
**(A)** $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = 1$

**(B)** $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = +\infty$

**(C)** $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = 0$

**(D)** Não existe $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

**3.** Na figura está parte da representação gráfica da função $f$, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_8 x$




$P$ é um ponto do gráfico de $f$, que tem ordenada $\frac{1}{3}$

Qual é a abcissa do ponto $P$ ?

**(A)** $1$

**(B)** $2$

**(C)** $\frac{8}{3}$

**(D)** $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$

**4.** Um tanque tem a forma de um paralelepípedo rectângulo, com $7\ m$ de comprimento, $5\ m$ de largura e $4\ m$ de altura.
Admita que o tanque está vazio.
Num certo instante, é aberta uma torneira que verte água para o tanque, à taxa de $2\ m^3$ por hora, até este ficar cheio.

Qual é a função que dá a **altura**, em metros, da água no tanque, $t$ horas após a abertura da torneira?

**(A)** $h(t) = 4 - 2t \ , \ t \in [0, 140]$

**(B)** $h(t) = \frac{2t}{35} \ , \ t \in [0, 140]$

**(C)** $h(t) = 4 - 2t \ , \ t \in [0, 70]$

**(D)** $h(t) = \frac{2t}{35} \ , \ t \in [0, 70]$

**5.** Lança-se um dado com as faces numeradas de 1 a 6.
Considere os acontecimentos:
$A$: «sair face ímpar»;
$B$: «sair face de número maior ou igual a 4».

Qual é o acontecimento **contrário** de $A \cup B$ ?

**(A)** sair a face 2

**(B)** sair a face 5

**(C)** sair a face 1 ou a face 5

**(D)** sair a face 4 ou a face 6

**6.** Seja $A$ um acontecimento possível, cuja probabilidade é diferente de $1$.
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|A)$ ?

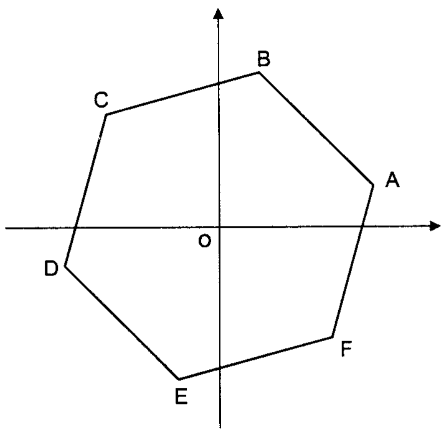
**(A)** $1$

**(B)** $0$

**(C)** $P(A)$

**(D)** $[P(A)]^2$

**7.** Na figura está representado um hexágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice $6$ de um certo número complexo.




O vértice $C$ é a imagem geométrica do número complexo

$$\sqrt{2}\ cis\ \frac{3\pi}{4}$$

Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice $D$ ?

**(A)** $\sqrt[6]{2}\ cis\ \frac{7\pi}{6}$

**(B)** $\sqrt[6]{2}\ cis\ \frac{13\pi}{12}$

**(C)** $\sqrt{2}\ cis\ \frac{7\pi}{6}$

**(D)** $\sqrt{2}\ cis\ \frac{13\pi}{12}$

## Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção**: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

**1.** Seja $A$ o conjunto dos números complexos cuja imagem, no plano complexo, é o interior do círculo de centro na origem do referencial e raio $1$.

**1.1.** Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a parte de $A$ contida no segundo quadrante (excluindo os eixos do referencial).

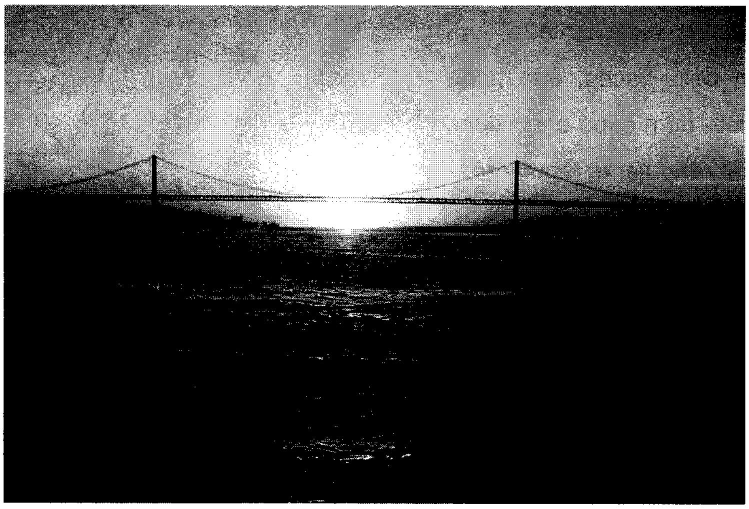
**1.2.** Sem recorrer à calculadora, mostre que o número complexo $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4\,cis\,\frac{\pi}{6}}$ pertence ao conjunto $A$.

**2.** Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x\,(x^2 + x)$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

**2.1.** Verifique que $f'(x) = e^x\,(x^2 + 3\,x + 1)$ e determine uma equação da recta tangente ao gráfico de $f$, no ponto de abcissa $0$.

**2.2.** Estude $f$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.



**3.** No presente ano civil, em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem $n$ do ano, é dado em horas, aproximadamente, por

$$f(n) = 12{,}2 + 2{,}64 \text{ sen } \frac{\pi\,(n-81)}{183} \qquad n \in \{1, 2, 3, .........., 366\}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

**Por exemplo**: no dia 3 de Fevereiro, trigésimo quarto dia do ano, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do Sol foi de $f(34) \approx 10{,}3$ horas.

**3.1.** No dia 24 de Março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às seis e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do Sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

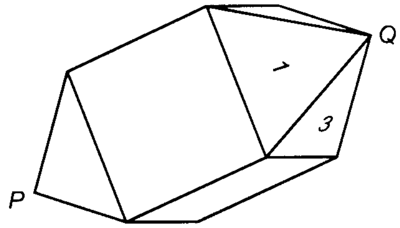
**Notas**:

- Recorde que, no presente ano, o mês de Fevereiro teve 29 dias.
- Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

**3.2.** Em alguns dias do ano, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é superior a $14{,}7$ horas. Recorrendo à sua calculadora, determine em quantos dias do ano é que isso acontece. Indique como procedeu.

**V.S.F.F.**

**4.** Na figura está representado um poliedro com doze faces, que pode ser decomposto num cubo e em duas pirâmides quadrangulares regulares.




**4.1.** Pretende-se numerar as doze faces do poliedro, com os números de 1 a 12 (um número diferente em cada face).

Como se vê na figura, duas das faces do poliedro já estão numeradas, com os números 1 e 3.

**4.1.1.** De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números?

**4.1.2.** De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números, de forma a que, nas faces de uma das pirâmides, fiquem só números ímpares e, nas faces da outra pirâmide, fiquem só números pares?

**4.2.** Considere agora o poliedro num referencial o. n. $Oxyz$, de tal forma que o vértice $P$ coincida com a origem do referencial, e o vértice $Q$ esteja no semieixo positivo $Oy$.

Escolhidos ao acaso três vértices distintos, qual é a probabilidade de estes definirem um plano paralelo ao plano de equação $y = 0$? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

**5.** Considere uma função $f$ de domínio $\mathbb{R}^+$. Admita que $f$ é positiva e que o eixo $Ox$ é assimptota do gráfico de $f$. Mostre que o gráfico da função $\frac{1}{f}$ não tem assimptota horizontal.

**FIM**

## COTAÇÕES

**Primeira Parte**.......................................................................................**63**

Cada resposta certa ............................................................................ +9
Cada resposta errada........................................................................... - 3
Cada questão não respondida ou anulada ........................................ 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

**Segunda Parte** .......................................................................................**137**

**1.** ............................................................................................ 21
- **1.1.** ..........................................................................9
- **1.2.** ..........................................................................12

**2.** ............................................................................................ 33
- **2.1.** ..........................................................................15
- **2.2.** ..........................................................................18

**3.** ............................................................................................ 33
- **3.1.** ..........................................................................15
- **3.2.** ..........................................................................18

**4.** ............................................................................................ 32
- **4.1.** ..........................................................................18
  - **4.1.1.** ....................................................7
  - **4.1.2.** ....................................................11
- **4.2.** ..........................................................................14

**5.** ............................................................................................ 18

**TOTAL** .......................................................................................**200**

**V.S.F.F.**

# Formulário

## Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

## Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

## Volumes

Prisma: $Área\ da\ base \times Altura$

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad (r - raio)$

## Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

## Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\, cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\; cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

## Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

# EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**
**Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa ajustado**

**Duração da prova: 120 minutos** — **1.ª FASE**
**2000** — **1.ª CHAMADA**

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

## COTAÇÕES

**Primeira Parte** .......................... **63**

Cada resposta certa .......................... +9
Cada resposta errada .......................... - 3
Cada questão não respondida ou anulada .......................... 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

**Segunda Parte** .......................... **137**

**1.** .......................... 21
  **1.1.** .......................... 9
  **1.2.** .......................... 12

**2.** .......................... 33
  **2.1.** .......................... 15
  **2.2.** .......................... 18

**3.** .......................... 33
  **3.1.** .......................... 15
  **3.2.** .......................... 18

**4.** .......................... 32
  **4.1.** .......................... 18
    **4.1.1.** .......................... 7
    **4.1.2.** .......................... 11
  **4.2.** .......................... 14

**5.** .......................... 18

**TOTAL** .......................... **200**

**V.S.F.F.**

## CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

### Primeira Parte

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

| **Questões** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Versão 1** | D | D | A | B | B | C | B |
| **Versão 2** | C | D | B | D | A | A | D |

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

| **Resp. erradas** / **Resp. certas** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 9 | 6 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| **2** | 18 | 15 | 12 | 9 | 6 | 3 | | |
| **3** | 27 | 24 | 21 | 18 | 15 | | | |
| **4** | 36 | 33 | 30 | 27 | | | | |
| **5** | 45 | 42 | 39 | | | | | |
| **6** | 54 | 51 | | | | | | |
| **7** | 63 | | | | | | | |

### Segunda Parte

### Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

## Critérios específicos

**1.1.** .................................................................................................................................. **9**

Escrever uma condição em $\mathbb{C}$ que defina o interior do círculo de centro na origem e raio $1$. Exemplo: $|\,z\,| < 1$ ........................................................4

Escrever uma condição em $\mathbb{C}$ que defina o segundo quadrante, excluindo os eixos. Exemplo: $Re(z) < 0 \wedge Im(z) > 0$ ............................4

Indicar a conjunção das duas condições ........................................................... 1

**1.2.** .................................................................................................................................. **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

**1.º Processo:**

Determinar o módulo do numerador: $\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$ ..............................3

Referir que o módulo do denominador é $4$ ........................................................3

Concluir que o módulo do quociente é $1/2$ ......................................................3

Concluir que, pelo facto de o seu módulo ser inferior a $1$, o número complexo dado pertence, efectivamente, ao conjunto $A$ .................................. 3

**2.º Processo:**

$$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{4\,cis\,\frac{\pi}{6}} = \frac{2\,cis\,\frac{\pi}{3}}{4\,cis\,\frac{\pi}{6}}$$ ........................................................................... 3

$$\frac{2\,cis\,\frac{\pi}{3}}{4\,cis\,\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\,cis\,\frac{\pi}{6}$$ ........................................................................... 3

Referir que o módulo do quociente é $1/2$ ........................................................ 3

Concluir que, pelo facto de o seu módulo ser inferior a $1$, o número complexo dado pertence, efectivamente, ao conjunto $A$ .................................. 3

**3.º Processo:**

$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4\,cis\,\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2\sqrt{3}+2\,i}$ .................................................................................... 3

$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2\sqrt{3}+2\,i} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}\,i$ ....................................................................................3

Determinar o módulo de $\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}\,i$ ............................................................ 3

Concluir que, pelo facto de o seu módulo ser inferior a $1$, o número complexo dado pertence, efectivamente, ao conjunto $A$ ................................... 3

**2.1.** .................................................................................................................. **15**

Verificar que $f'(x) = e^x(x^2+3\,x+1)$ ........................................................5

$f'(x) =$

$= e^x(x^2+\,x) + e^x(2\,x+1)$ ................................................4

$= e^x(x^2+\,3\,x+1)$ ............................................................ 1

$f'(0) = 1$ .................................................................................................. 3

$f\ (0) = 0$ ...................................................................................................3

Escrever uma equação da recta pedida ..............................................................4

**2.2.** .................................................................................................................. **18**

Determinar $f''(x)$ ........................................................................................4

$f''(x) = e^x(x^2+\,3\,x+1) + e^x(2\,x+3)$ .......................... 3

$= e^x(x^2+\,5\,x+4)$ ............................................................ 1

Determinar os zeros de $f''$ ........................................................................... 4

$e^x(x^2+\,5\,x+4) = 0 \Leftrightarrow\ x^2+\,5\,x+4=0$ ..................... 2

$\Leftrightarrow x = \,-4\ \vee\ x = \,-1$ ...................................................2

**5.** .............................................................................................................. **18**

Concluir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ .......................................................... 5

Concluir que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ **(ver nota 1)**.......................................... 5

Concluir que o gráfico de $\dfrac{1}{f}$ não tem assimptota horizontal .......................... 5

Clareza e rigor **(ver nota 2)**........................................................................ 3

**Notas:**

1. O examinando não necessita, para a conclusão pretendida, de referir o sinal do infinito. Portanto, se não colocar qualquer sinal, não deverá ser penalizado.

   Por outro lado, se o examinando escrever $+\infty$, não se exige que ele justifique o sinal $+$ (a justificação é evidente, pelo que o examinando pode não sentir necessidade de a fazer).

   Se o examinando escrever $-\infty$, ou $\pm\infty$, deverá ser penalizado em 2 pontos.

2. Deverão ser valorizadas as respostas formalmente correctas e reveladoras de um raciocínio bem estruturado.

**Notas**:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
   No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.
   Esta discriminação é feita apenas para o primeiro processo; no caso de o examinando utilizar o segundo processo, a situação é análoga, com a única diferença de se considerarem *arranjos* em vez de *combinações*.

   $\frac{2 \times {}^{4}C_{3}}{{}^{10}C_{3}}$ (fracção correcta)............................................................................ 13

   $\frac{{}^{4}C_{3}}{{}^{10}C_{3}}$ ........................................................................................................ 8

   $\frac{{}^{4}C_{3} \times {}^{4}C_{3}}{{}^{10}C_{3}}$ ........................................................................................... 7

   $\frac{{}^{8}C_{3}}{{}^{10}C_{3}}$ ........................................................................................................ 6

   Outras fracções com denominador ${}^{10}C_{3}$ ............................................................ 5

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverão ser atribuídos 4 pontos à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 8 pontos à sua resposta.

**4.1.2.** ........................................................................................................ **11**

Número pedido $= {}^4A_2 \times {}^6A_4 \times 4\,!$ **(ver nota)** ........................................ 10

Número pedido $= 103\,680$ ........................................................................ 1

**Nota:**
Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, com a respectiva cotação a atribuir. Caberá ao corrector fazer as extrapolações necessárias para outras situações.

${}^4A_2 \times {}^6A_4$ ........................................................................................ 7

${}^4C_2 \times {}^6C_4 \times 4\,!$ .............................................................................. 6

${}^4C_2 \times {}^6C_4$ ........................................................................................ 3

**4.2.** ........................................................................................................ **14**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

**1.º Processo:**
O espaço de resultados é a colecção de conjuntos $\{a, b, c\}$, onde $a$, $b$ e $c$ designam quaisquer três dos dez vértices do poliedro.

Número de casos possíveis $= {}^{10}C_3$

Número de casos favoráveis $= 2 \times {}^4C_3$

Probabilidade pedida $= \dfrac{2 \times {}^4C_3}{{}^{10}C_3} = \dfrac{1}{15}$

**2.º Processo:**
O espaço de resultados é o conjunto de sequências $(a, b, c)$, com $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$, onde $a$, $b$ e $c$ designam quaisquer três dos dez vértices do poliedro.

Número de casos possíveis $= {}^{10}A_3$

Número de casos favoráveis $= 2 \times {}^4A_3$

Probabilidade pedida $= \dfrac{2 \times {}^4A_3}{{}^{10}A_3} = \dfrac{1}{15}$

Qualquer que seja o processo utilizado pelo examinando, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** ................................................ 13

Simplificação da fracção ........................................................................ 1

4. O processo gráfico, referido na nota anterior, para obter os valores $153{,}4$ e $191{,}6$ é o mais esperado e o mais natural, de acordo com o espírito do programa.
No entanto, também é possível que o examinando apresente uma resolução que não se apoie nas capacidades gráficas da calculadora, como a que se exemplifica a seguir:

$$12{,}2+2{,}64 \operatorname{sen} \frac{\pi(n-81)}{183}>14{,}7 \Leftrightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi(n-81)}{183}>\frac{2{,}5}{2{,}64} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2{,}5}{2{,}64}\right)<\frac{\pi(n-81)}{183}<\pi-\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2{,}5}{2{,}64}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 81+\frac{183}{\pi} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2{,}5}{2{,}64}\right)<n<81+\frac{183}{\pi}\left[\pi-\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2{,}5}{2{,}64}\right)\right]$$

Tem-se, então, que $153{,}445<n<191{,}555$

5. O examinando pode obter directamente o conjunto solução da inequação, $\{154, 155, \ldots\ldots, 191\}$, sem passar pelo passo anterior, se utilizar, por exemplo, a ferramenta *table* da calculadora.

6. Qualquer que seja o método utilizado pelo examinando, ele deverá ser explicitado (tal é exigido no enunciado).
Se o examinando não explicar como obteve o conjunto solução da inequação, deverá ser cotado em zero dos catorze pontos previstos para a resolução da mesma.

7. Pode acontecer que o examinando, depois de obter a condição $153{,}4<n<191{,}6$, escreva $191{,}6-153{,}4=38{,}2$, concluindo então que o número pedido é 38 (arredondando a diferença obtida, ou ignorando a parte decimal da mesma).
Note-se que, apesar de o resultado estar certo, o método é incorrecto. Basta pensar que o resultado final estaria mal se os números fossem $153{,}1$ e $191{,}9$ e arredondássemos a diferença, ou se os números fossem $153{,}6$ e $191{,}4$ e ignorássemos a parte decimal da diferença.
Se o examinando cometer este erro, deverão ser atribuídos zero dos sete pontos (5 + 2) previstos para a obtenção do conjunto solução da inequação e para a conclusão.

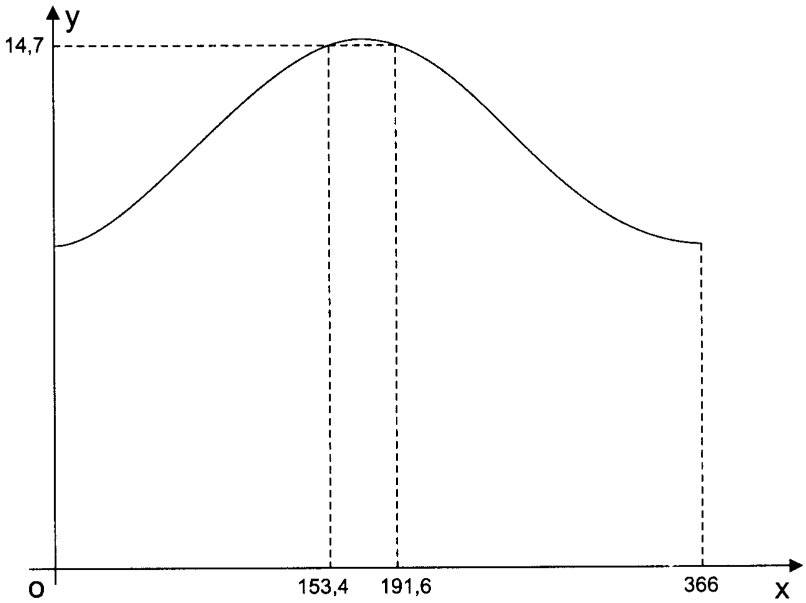
**4.1.1.** .......................................................................................................... **7**

Número pedido $=10!$ ........................................................................6
Número pedido $=3\,628\,800$ .......................................................................... 1

**Notas**:

1. Se o examinando não escrever esta inequação, mas, na sua resposta, existir evidência de que ele procura as suas soluções, estes 2 pontos deverão ser atribuídos.

2. Os valores $153{,}4$ e $191{,}6$ podem ser obtidos graficamente, com a calculadora, utilizando, por exemplo, as ferramentas *zoom* e *trace*, ou a ferramenta *intersect*.




Nesta situação, uma utilização não totalmente correcta da calculadora pode conduzir a aproximações grosseiras dos valores pretendidos (partes inteiras diferentes de $153$ e/ou de $191$). Se tal acontecer, deverão ser atribuídos zero, ou cinco, dos nove pontos previstos para este passo da resolução do problema, conforme o examinando tiver errado uma, ou duas, das aproximações.

3. Pode igualmente acontecer que o examinando escreva $153 < n < 191$, em vez de $153{,}4 < n < 191{,}6$.
Note-se que a condição $153 < n < 191$ conduz à solução errada $37$.
Nesta situação, deverão ser atribuídos cinco dos nove pontos previstos para este passo da resolução do problema.

Estudar o sinal de $f''$ .......................................................................................4

Concluir que o gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -4]$ e em $[-1, +\infty[$ e voltada para baixo em $[-4, -1]$ (ver **nota**)......................................................................................... 4

Concluir que o gráfico de $f$ tem dois pontos de inflexão ...................................2

**Nota:**
Se o examinando apresentar os intervalos abertos, não deverá ser penalizado.

**3.1.** ......................................................................................................... **15**

$n = 84$ ...........................................................................................................4
$f(84) \approx 12{,}336$ .........................................................................................3
Concluir que o pôr do Sol ocorreu às $18\,h\ \ 50\,m$...............................................8

$12{,}336\,h \approx 12\,h\ \ 20\,m$ ........................................................4
$6\,h\ \ 30\,m + 12\,h\ \ 20\,m = 18\,h\ \ 50\,m$................................4

ou

$6{,}5 + 12{,}336 = 18{,}836$........................................................4
$18{,}836\,h \approx 18\,h\ \ 50\,m$ ........................................................4

**3.2.** ......................................................................................................... **18**

Traduzir o problema por uma inequação: $f(n) > 14{,}7$ **(ver nota 1)**................2

Resolver a inequação (utilizando a calculadora) ................................................ 14

$f(n) > 14{,}7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 153{,}4 < n < 191{,}6$ **(ver notas 2, 3 e 4)** ...................... 9

$\Leftrightarrow\ n \in \{154, 155, \ldots\ldots, 191\}$ **(ver notas 5 e 6)** .................5

Conclusão ( número pedido $= 38$ ) **(ver nota 7)** ...............................................2

| Código Confidencial da Escola | Número Convencional da Prova | Primeira Parte | | | | | | | | Segunda Parte | | | | | | | | | | | TOTAL da PROVA (200) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | T1 (63) | 1.1. | 1.2. | 2.1. | 2.2. | 3.1. | 3.2. | 4.1.1. | 4.1.2. | 4.2. | 5. | T2 (137) | |
| | | (9) | (9) | (9) | (9) | (9) | (9) | (9) | | (9) | (12) | (15) | (18) | (15) | (18) | (7) | (11) | (14) | (18) | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Data ____/____/____

O Professor Corrector ______________________________

**GRELHA DE CLASSIFICAÇÃO**