

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

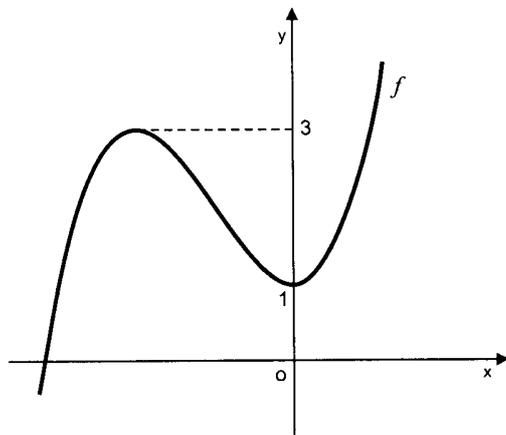
A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função polinomial de terceiro grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.



Quantas são as soluções da equação $f(x) = 2$?

- (A) uma (B) duas (C) três (D) quatro
2. Considere a função h definida em \mathbb{R} por $h(x) = \sin x$

Qual das seguintes equações pode definir uma recta tangente ao gráfico de h ?

- (A) $y = 2x + \pi$ (B) $y = -2$
(C) $y = \sqrt{2}x - 9$ (D) $y = x$

V.S.F.F.

435.V1/3

6. Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Seja X o número de vezes que sai a face 6 nos dois lançamentos.

Qual é a distribuição de probabilidades da variável X ?

(A)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$

(B)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$

(C)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

(D)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$

7. Qual das seguintes condições define uma recta no plano complexo ?

(A) $|z - 1| = 4$

(B) $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

(C) $3z + 2i = 0$

(D) $|z - 1| = |z + i|$

V.S.F.F.

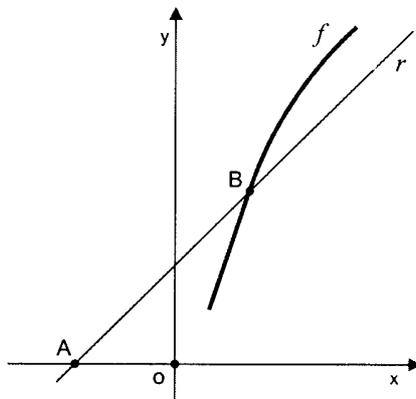
435.V1/5

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 2x - \cos x$
- 1.1. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem, pelo menos, um zero, no intervalo $]0, \pi[$.
- 1.2. Seja f' a função derivada de f . Mostre que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e justifique que o zero de f , cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.
- 1.3. Na figura abaixo estão representadas:
- parte do gráfico da função f
 - parte de uma recta r , cuja inclinação é 45° , que contém o ponto $A(-3, 0)$ e que intersecta o gráfico da função f no ponto B



Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo $[AOB]$, onde O designa a origem do referencial. Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: sempre que, nos valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.

2. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude h (em **quilómetros**), por

$$P(h) = 101 e^{-0,12h}$$

- 2.1. A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico - Açores. A altitude do cume do Pico é 2350 metros.



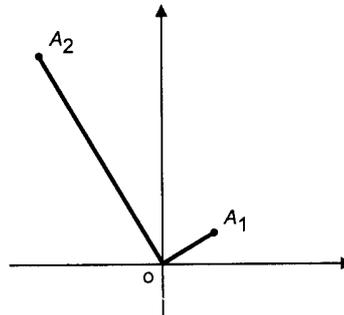
Qual é o valor da pressão atmosférica, nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.

- 2.2. Determine x tal que, para qualquer h , $P(h+x) = \frac{1}{2} P(h)$. Apresente o resultado arredondado às décimas.

Interprete o valor obtido, no contexto do problema.

3. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos, e sejam z_1 e z_2 dois elementos de \mathbb{C} . Sabe-se que:

- z_1 tem argumento $\frac{\pi}{6}$
- $z_2 = z_1^4$
- A_1 e A_2 são as imagens geométricas de z_1 e de z_2 , respectivamente



- 3.1. Justifique que o ângulo $A_1 O A_2$ é recto (O designa a origem do referencial).

- 3.2. Considere, no plano complexo, a circunferência C definida pela condição $|z| = |z_1|$. Sabendo que o perímetro de C é 4π , represente, na **forma algébrica**, o número complexo z_1

4.

4.1. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam E_1 e E_2 dois acontecimentos possíveis ($E_1 \subset S$ e $E_2 \subset S$).

Prove que $P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) = 1 - P(E_1) \times P(E_2 | E_1)$

(P designa probabilidade, $\overline{E_1}$ e $\overline{E_2}$ designam os acontecimentos contrários de E_1 e de E_2 , e $P(E_2 | E_1)$ designa a probabilidade de E_2 , se E_1).

4.2. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus.

De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.

Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas não ser do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Nota: se o desejar, utilize a igualdade referida na alínea anterior; neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos E_1 e E_2 , no contexto da situação apresentada.

4.3. Num certo jogo de cartas, utiliza-se um baralho completo e dão-se treze cartas a cada jogador.

Imagine que está a participar nesse jogo.

Qual é a probabilidade de, nas treze cartas que vai receber, haver exactamente seis cartas do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.....63

Cada resposta certa +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte 137

1. 51
 1.1. 16
 1.2. 17
 1.3. 18

2. 33
 2.1. 15
 2.2. 18

3. 21
 3.1. 11
 3.2. 10

4. 32
 4.1. 12
 4.2. 10
 4.3. 10

TOTAL 200

V.S.F.F.

435.V1/9

Formulário

Áreas de figuras planas

$$\text{Losango: } \frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$$

$$\text{Trapézio: } \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$$

$$\text{Polígono regular: } \text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$$

$$\text{Círculo: } \pi r^2 \quad (r - \text{raio})$$

Áreas de superfícies

$$\text{Área lateral de um cone: } \pi r g \\ (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$$

$$\text{Área de uma superfície esférica: } 4 \pi r^2 \\ (r - \text{raio})$$

Volumes

$$\text{Prisma: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cilindro: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Pirâmide: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cone: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Esfera: } \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (r - \text{raio})$$

Trigonometria

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{cos}(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Complexos

$$(\rho \text{ cis } \theta) \cdot (\rho' \text{ cis } \theta') = \rho \rho' \text{ cis } (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \text{ cis } \theta}{\rho' \text{ cis } \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \text{ cis } (\theta - \theta')$$

$$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n \theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$