

**EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO**  
**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**  
**Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos**

Duração da prova: 120 minutos  
 2000

**PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA**

---

**COTAÇÕES**

**Primeira Parte** ..... **63**

Cada resposta certa .....	+9
Cada resposta errada .....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada .....	0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

**Segunda Parte** ..... **137**

1.	.....	21
	1.1. ....	11
	1.2. ....	10
2.	.....	31
	2.1. ....	16
	2.2. ....	15
3.	.....	41
	3.1. ....	14
	3.2. ....	14
	3.3. ....	13
4.	.....	29
	4.1. ....	14
	4.2. ....	15
5.	.....	15

**TOTAL** ..... **200**

V.S.F.F.

435/C/1

# CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

## Primeira Parte

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	C	C	A	A	C	B
Versão 2	D	B	A	A	B	C	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

## Segunda Parte

### **Critérios gerais**

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicitar todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

**Critérios específicos**

**1.1. .... 11**

Dividir  $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$  por  $x - 1$  ..... 3

Aplicar a fórmula resolvente da equação do segundo grau para obter  $x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$  ..... 2

Apresentar as raízes na forma algébrica, simplificando-as o mais possível ..... 6

$$\begin{aligned} \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} &= \\ &= \frac{2 \pm i\sqrt{12}}{2} \dots\dots\dots 3 \\ &= 1 \pm i\sqrt{3} \dots\dots\dots 3 \end{aligned}$$

**1.2. .... 10**

Indicar o valor de  $z$  ..... 5

Na tabela seguinte, apresenta-se a forma como deve ser cotada a indicação do valor de  $z$  :

	Justifica (*)	Não justifica
Valor correcto (**)	5	4
Apenas o argumento está correcto (***)	3	2
Apenas o módulo está correcto (****)	1	1

(\*) A justificação pode ser feita por meio de um desenho.

(\*\*)  $z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$  ou  $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

(\*\*\*) Exemplos:  $z = \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ ,  $z = 1 + i$ ,  $z = 2 + 2i$

(\*\*\*\*) Exige-se que a imagem geométrica de  $z$  esteja no primeiro quadrante. Exemplo:  $z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$

Determinar  $\frac{z}{i}$  na forma algébrica ..... 5

Escrever  $i$  na forma trigonométrica ..... 1

Efectuar a divisão na forma trigonométrica ..... 2

Escrever  $\frac{z}{i}$  na forma algébrica ..... 2

ou

$\frac{z}{i} = -iz$  ..... 1

$-iz = \bar{z}$  (por transformações geométricas) ..... 2

Escrever  $\bar{z}$  na forma algébrica ..... 2

ou

Escrever  $z$  na forma algébrica (**ver nota**) ..... 2

Efectuar a divisão na forma algébrica ..... 2

Simplificar o resultado ..... 1

**Nota:**

Se o examinando, na primeira etapa da resolução deste exercício (indicação do valor de  $z$ ), escrever directamente o respectivo valor na forma algébrica,  $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ , devem ser atribuídos os mesmos dois pontos.

**2.1. .... 16**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

**1.º Processo:**

O espaço de resultados é a colecção de conjuntos  $\{a, b\}$ , onde  $a$  e  $b$  designam dois quaisquer dos seis vértices do octaedro.

Número de casos possíveis =  ${}^6C_2$

Número de casos favoráveis =  ${}^4C_2$

Probabilidade pedida =  $\frac{{}^4C_2}{{}^6C_2} = \frac{2}{5}$

ou, atendendo a que cada conjunto de dois vértices define uma e uma só recta,

Número de casos possíveis = 15

(doze rectas que contêm as arestas do octaedro + três rectas que contêm as diagonais espaciais do octaedro).

Número de casos favoráveis = 6

(quatro rectas que contêm os lados do quadrado  $[OSQT]$  + duas rectas que contêm as diagonais desse quadrado).

Probabilidade pedida =  $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

## 2.º Processo:

O espaço de resultados é o conjunto de pares ordenados  $(a, b)$ , com  $a \neq b$ , onde  $a$  e  $b$  designam dois quaisquer dos seis vértices do octaedro.

$$\text{Número de casos possíveis} = {}^6A_2$$

$$\text{Número de casos favoráveis} = {}^4A_2$$

$$\text{Probabilidade pedida} = \frac{{}^4A_2}{{}^6A_2} = \frac{2}{5}$$

Qualquer que seja o processo utilizado pelo examinando, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

- O examinando resolve correctamente o problema (**ver nota 1**). .....16
- O examinando indica correctamente o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis. Aplica correctamente a Regra de Laplace, mas não apresenta o resultado na forma de fracção irredutível, ou simplifica mal a fracção. ....15
- O examinando indica correctamente o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis. Não aplica a Regra de Laplace, ou aplica-a incorrectamente. .... 12
- O examinando indica o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas, de acordo com um dos modelos, apenas um deles está correcto. Aplica correctamente a Regra de Laplace. ....7
- O examinando indica o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas, de acordo com um dos modelos, apenas um deles está correcto. Não aplica a Regra de Laplace, ou aplica-a incorrectamente. .... 6
- O examinando indica, correctamente, apenas o número de casos possíveis, ou apenas o número de casos favoráveis. .... 6
- O examinando erra a contagem, quer dos casos possíveis, quer dos casos favoráveis, mas esboça uma estratégia correcta de contagem (**ver nota 2**). Aplica correctamente a Regra de Laplace. .... 5
- O examinando erra a contagem, quer dos casos possíveis, quer dos casos favoráveis, mas esboça uma estratégia correcta de contagem. Não aplica a Regra de Laplace, ou aplica-a incorrectamente. .... 4
- O examinando utiliza correctamente a Regra de Laplace, mas erra a contagem, quer dos casos possíveis, quer dos casos favoráveis, não esboçando qualquer estratégia correcta de contagem. .... 1

### Notas:

1. Qualquer que seja o modelo adoptado, não se exige que o examinando explicito o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

Por exemplo, uma resposta como  $\frac{{}^4C_2}{{}^6C_2} = \frac{2}{5}$  está totalmente correcta.

2. Indicam-se a seguir algumas situações que exemplificam o que se deve entender por *esboça uma estratégia correcta de contagem*:
  - esquema ou diagrama incompleto;
  - tentativa, não totalmente conseguida, de contagem exaustiva.

Domínio de  $f = [0, 1]$  ..... 3

Expressão analítica de  $f : f(a) = (1 - a)^2$  ..... 12

A expressão analítica de  $f$  pode ser obtida por, pelo menos, dois processos:

**1.º Processo:**

Referir que a secção em causa é semelhante ao quadrado  $[OPQR]$  ..... 3

Referir que a razão das áreas (da secção e do quadrado  $[OPQR]$ ) é  $\left(\frac{\overline{AS}}{\overline{RS}}\right)^2 = (1 - a)^2$  ..... 8

Concluir que a área da secção é igual a  $(1 - a)^2$  ..... 1

**2.º Processo:**

Existe evidência de que o examinando reconhece que a secção em causa é um quadrado (ver nota 1), excepto no caso em que  $A$  coincide com  $S$  (ver nota 2) ..... 2

Área do quadrado =  $(1 - a)^2$  ..... 10

$\overline{AR} = a \Rightarrow \overline{AS} = 1 - a$  ..... 2

Lado do quadrado =  $\overline{AS}$  ..... 7

Referir esta igualdade ..... 3

Justificá-la correctamente

(ver nota 3) ..... 4

Área do quadrado =  $(1 - a)^2$  ..... 1

ou

Sejam:

$A'$  - projecção de  $A$  no plano  $xOy$

$C'$  - projecção de  $C$  no plano  $xOy$

$\overline{AR} = a \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{A'R} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$  ..... 3

$\Rightarrow \overline{A'C'} = \sqrt{2} - \sqrt{2} a$  ..... 3

$\Rightarrow$  Diagonal do quadrado =  
 $= \sqrt{2} - \sqrt{2} a$  ..... 1

Área do quadrado =  $(1 - a)^2$  ..... 3

**Notas:**

1. Ao longo dos critérios de classificação deste segundo processo, designaremos este quadrado por  $[ABCD]$ , sendo:
  - $A$  - vértice pertencente à aresta  $[RS]$ ;
  - $B$  - vértice pertencente à aresta  $[QS]$ ;
  - $C$  - vértice pertencente à aresta  $[PS]$ ;
  - $D$  - vértice pertencente à aresta  $[OS]$ .
2. Não se exige que o examinando refira este caso degenerado.
3. O examinando deverá referir que:
  - as faces do octaedro são triângulos equiláteros;
  - sendo  $[QRS]$  um triângulo equilátero, o triângulo  $[ABS]$  é também equilátero, pois os segmentos  $[QR]$  e  $[AB]$  são paralelos.

**3.1. .... 14**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

**1.º Processo**

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{h}{\overline{BA}} \dots\dots\dots 8 \\ h &= \overline{BC} \cdot \text{sen } \alpha \quad (\text{pois } \overline{BA} = \overline{BC}) \dots\dots\dots 4 \\ \text{Área do triângulo} &= \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen } \alpha}{2} \dots\dots\dots 1 \\ \text{Área do triângulo} &= \frac{\overline{BC}^2}{2} \cdot \text{sen } \alpha \dots\dots\dots 1 \end{aligned}$$

**2.º Processo**

Designando por  $h$  a altura do triângulo relativa ao vértice  $B$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} &= \frac{h}{\overline{BC}} \quad \left(\text{ou } \frac{h}{\overline{BA}}\right) \dots\dots\dots 4 \\ h &= \overline{BC} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \dots\dots\dots 1 \\ \text{sen } \frac{\alpha}{2} &= \frac{\overline{AC}/2}{\overline{BC}} \quad \left(\text{ou } \frac{\overline{AC}/2}{\overline{BA}}\right) \dots\dots\dots 4 \\ \overline{AC} &= 2 \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen } \frac{\alpha}{2} \dots\dots\dots 1 \\ \text{Área do triângulo} &= \frac{2 \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen } \frac{\alpha}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{2} \dots\dots\dots 1 \\ \text{Área do triângulo} &= \frac{\overline{BC}^2}{2} \cdot 2 \cdot \text{sen } \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \dots\dots\dots 1 \\ \text{Área do triângulo} &= \frac{\overline{BC}^2}{2} \cdot \text{sen } \alpha \dots\dots\dots 2 \end{aligned}$$

3.2. .... 14

O examinando deve referir os seguintes aspectos:

- O polígono pode ser decomposto em  $n$  triângulos isósceles com um vértice comum (o centro da circunferência).
- A amplitude do ângulo ao centro correspondente a cada um dos lados do polígono é  $\frac{2\pi}{n}$ .
- Pela alínea anterior, a área de cada triângulo isósceles é  $\frac{1}{2} \text{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)$ .
- A área do polígono é  $n$  vezes a área de cada triângulo isósceles.

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

Conteúdo	Forma	Resposta bem estruturada	Resposta mal estruturada
O examinando refere os quatro aspectos		14	11
O examinando refere três aspectos		10	8
O examinando refere dois aspectos		6	5
O examinando refere um aspecto		2	2

3.3. .... 13

$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \pi$  (determinação analítica do limite) ..... 6

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} \text{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)}{\frac{2}{n}} = \dots\dots\dots 2 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \pi \times \frac{\text{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)}{\frac{2\pi}{n}} \right) = \dots\dots\dots 2 \\ &= \pi \times 1 = \pi \dots\dots\dots 2 \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \text{Área do círculo}$  (interpretação geométrica) ..... 7

**Nota:**

Deve ser atribuída a cotação máxima (13 pontos) a uma resolução do tipo:

Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \text{Área do círculo}$ , e como a área do círculo é  $\pi$ , resulta que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \pi.$$

Calcular  $C'(t)$  ..... 4

$$C'(t) = (t^2)' e^{-0,6t} + t^2 (e^{-0,6t})' \dots\dots\dots 2$$

$$C'(t) = 2t e^{-0,6t} - 0,6t^2 e^{-0,6t} \dots\dots\dots 2$$

Determinar os zeros de  $C'$  ..... 4

$$2t e^{-0,6t} - 0,6t^2 e^{-0,6t} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,6t}(2t - 0,6t^2) = 0 \dots\dots\dots 1$$

$$\Leftrightarrow 2t - 0,6t^2 = 0 \dots\dots\dots 1$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{10}{3} \dots\dots\dots 2$$

ou

$$2t e^{-0,6t} - 0,6t^2 e^{-0,6t} = 0$$

$$\Leftrightarrow t(2e^{-0,6t} - 0,6te^{-0,6t}) = 0 \dots\dots\dots 1$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee 2e^{-0,6t} - 0,6te^{-0,6t} = 0 \dots\dots\dots 1$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{10}{3} \dots\dots\dots 2$$

Verificar que  $\frac{10}{3}$  é o valor de  $t$  para o qual  $C$  toma o seu valor máximo (ver nota 1) .....4

$f(\frac{10}{3}) \approx 1,5$  (ver nota 2) .....2

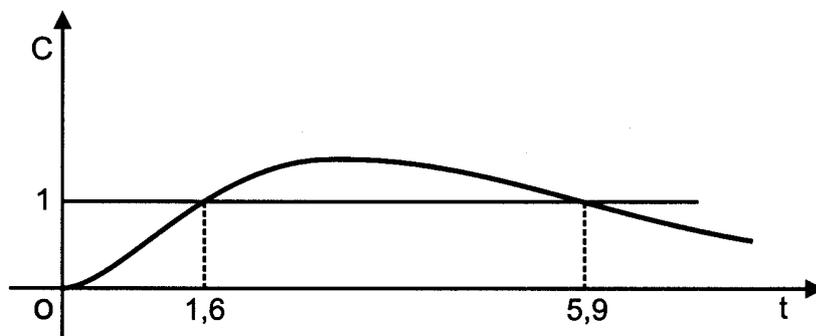
**Notas:**

1. O examinando deverá mostrar que  $\frac{10}{3}$  é o valor de  $t$  para o qual  $C$  toma o seu valor máximo através do estudo da variação do sinal de  $C'$ , o qual pode ser apresentado por meio de um quadro.

2. Se o examinando não apresentar o valor com a aproximação pedida, ou apresentar o valor mal arredondado, deverá ser penalizado em 1 ponto.

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta (composição com noventa e nove palavras, enriquecida com o traçado de um gráfico):

Na figura encontra-se um esboço de parte do gráfico da concentração do medicamento, após ter sido tomado por uma pessoa. Na mesma figura, a recta horizontal de ordenada 1 corresponde ao limiar da acção do analgésico.



$$5,9 - 1,6 = 4,3$$

Deste gráfico ressalta que o «slogan» é enganoso. A acção do medicamento não é rápida, nem prolongada. Os efeitos só se começam a sentir ao fim de mais de uma hora e meia, ultrapassando largamente a meia hora recomendada pela associação de defesa do consumidor, e duram menos de quatro horas e meia, ficando, assim, aquém das cinco horas preconizadas pela referida associação.

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

Forma	Redacção clara e sem erros (*)	Redacção clara, mas com um ou dois erros (*)	Redacção clara, mas com mais de dois erros (*)	Redacção pouco clara
O examinando conclui que a acção do medicamento não é rápida nem prolongada. <b>(ver nota 1)</b>	15	14	12	10
O examinando conclui apenas que a acção do medicamento não é prolongada. <b>(ver nota 2)</b>	12	11	9	7
O examinando conclui apenas que a acção do medicamento não é rápida. <b>(ver nota 3)</b>	10	9	7	5

(\*) Erros de ortografia e/ou de sintaxe. O mesmo erro de ortografia, repetido ao longo da composição, conta como **um** erro.

**Notas:**

1. A conclusão de que a acção do medicamento não é rápida nem prolongada pressupõe que o examinando cumpra os seguintes passos:
  - Reprodução ou descrição do gráfico da função obtido com a calculadora.
  - Determinação de valores aproximados dos objectos cuja imagem é 1 (aceitam-se valores entre 1,5 e 1,7 e entre 5,8 e 6).
  - Cálculo da diferença entre estes dois valores.

Na composição, o examinando deve confrontar o valor aproximado que obteve para o menor dos objectos cuja imagem é 1 e a referida diferença com as duas recomendações da associação de defesa do consumidor.

O grau de desenvolvimento da composição deve respeitar os limites indicados no enunciado (entre sessenta e cento e vinte palavras). Se não respeitar, deve ser aplicada uma penalização de 2 pontos.

2. A conclusão de que a acção do medicamento não é prolongada também pressupõe que o examinando cumpra os passos referidos na nota anterior.

Na composição, o examinando deve confrontar a diferença entre os valores aproximados dos objectos cuja imagem é 1 com a recomendação da associação de defesa do consumidor de que a acção do medicamento deve permanecer durante, pelo menos, cinco horas (após ter começado a produzir efeito).

Se, neste caso, a composição tiver menos do que quarenta palavras, deve ser aplicada uma penalização de 2 pontos.

3. A conclusão de que a acção do medicamento não é rápida pressupõe apenas os seguintes passos:
  - Reprodução ou descrição do gráfico da função obtido com a calculadora.
  - Determinação de um valor aproximado do menor dos dois objectos cuja imagem é 1 (aceitam-se valores entre 1,5 e 1,7).

Na composição, o examinando deve confrontar esse valor com a recomendação da associação de defesa do consumidor de que a acção do medicamento deve começar a produzir efeito, no máximo, meia hora após ter sido tomado.

Se, neste caso, a composição tiver menos do que quarenta palavras, deve ser aplicada uma penalização de 2 pontos.

4. Se o examinando não tiver efectuado uma composição, ou se esta não incluir as confrontações referidas acima, mas tiver cumprido, na totalidade ou em parte, os passos referidos na nota 1, a sua resposta deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Cumpriu todos os passos referidos na nota 1 .....5  
Cumpriu apenas os dois primeiros passos referidos na nota 1 ..... 3  
Cumpriu apenas o primeiro passo referido na nota 1 ..... 1

O examinando deve utilizar:

- Leis de De Morgan
- Probabilidade da união de dois acontecimentos
- Probabilidade do acontecimento contrário (ou probabilidade do acontecimento certo e probabilidade da união disjunta de acontecimentos)

Indica-se a seguir a forma como esta alínea deve ser cotada:

O examinando utiliza as três propriedades e prova a igualdade pretendida .....	15
O examinando utiliza as três propriedades, mas não prova a igualdade pretendida .....	10
O examinando utiliza apenas duas propriedades .....	6
O examinando utiliza apenas uma propriedade .....	3