EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos | **Época Especial**
2001 | **Julho/Agosto**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Considere a equação $3\,y = \log_2 x \qquad (\,x > 0\,)$

Qual das seguintes condições é equivalente a esta equação?

(A) $x = 8^y$ **(B)** $x = 3\,y^2$ **(C)** $y = 9^x$ **(D)** $y = \left(\frac{x}{3}\right)^2$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que a sua **derivada**, $\boldsymbol{f'}$, é tal que $f'(x) = x - 2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

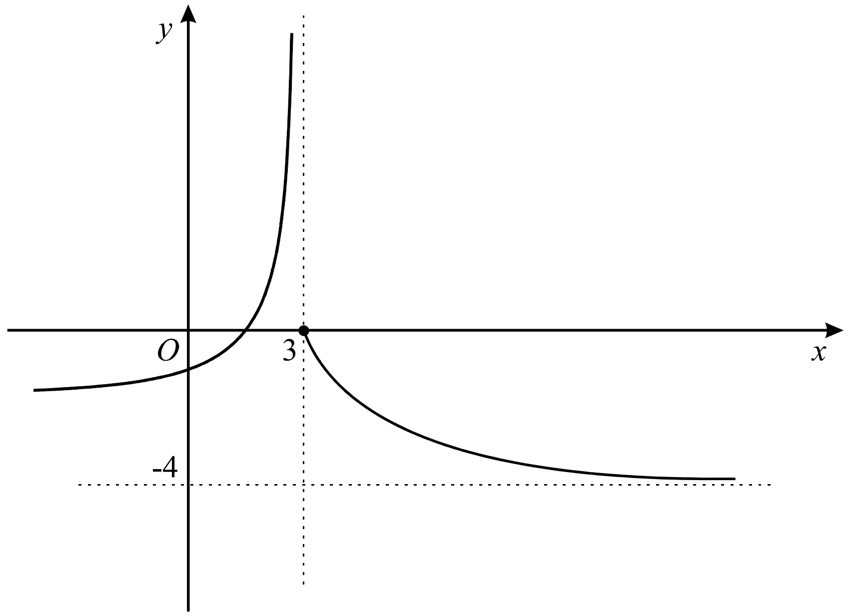
Relativamente à **função** $\boldsymbol{f}$, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) f é crescente em $\mathbb{R}$
(B) f é decrescente em $\mathbb{R}$
(C) f tem um mínimo para $x = 2$
(D) f tem um máximo para $x = 2$

3. Considere, num referencial o.n. xOy, um ponto P, distinto da origem e pertencente à recta de equação $y = 2\,x$.
Seja Q o simétrico de P, em relação à origem do referencial.
Considere o rectângulo de lados paralelos aos eixos do referencial e tal que uma das suas diagonais é o segmento $[PQ]$.
Qual das expressões seguintes dá a área desse rectângulo, em função da abcissa x do ponto P?

(A) $2\,x^2$ **(B)** $6\,x^2$ **(C)** $8\,x^2$ **(D)** $12\,x^2$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.
As rectas de equações $x = 3$ e $y = -4$ são as únicas assimptotas do gráfico de g.



Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim g(x_n) = +\infty$

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n)?

(A) $3 - \frac{1}{n}$

(B) $3 + \frac{1}{n}$

(C) $-4 - \frac{1}{n}$

(D) $-4 + \frac{1}{n}$

5. Numa turma com doze raparigas e sete rapazes, vão ser escolhidos cinco elementos para formar uma comissão.
Pretende-se que essa comissão seja constituída por alunos **dos dois sexos**, mas tenha mais raparigas do que rapazes.
Nestas condições, quantas comissões diferentes se podem formar?

(A) ${}^{19}C_5 \times {}^{5}C_3 + {}^{19}C_5 \times {}^{5}C_2$

(B) ${}^{12}C_4 \times {}^{7}C_1 + {}^{8}C_3 \times {}^{6}C_2$

(C) ${}^{19}C_{12} \times {}^{12}C_3 + {}^{19}C_7 \times {}^{7}C_2$

(D) ${}^{12}C_4 \times {}^{7}C_1 + {}^{12}C_3 \times {}^{7}C_2$

6. Dois atiradores, António e Belmiro, disparam simultaneamente sobre um alvo.

A probabilidade de o António acertar no alvo é $0{,}7$.

A probabilidade de o Belmiro acertar no alvo é $0{,}6$.

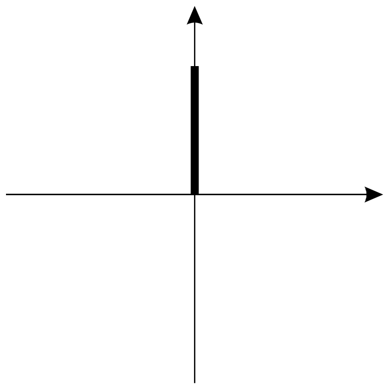
Admita que são independentes os acontecimentos «*O António acerta no alvo*» e «*O Belmiro acerta no alvo*».

Qual é a probabilidade de o alvo ser atingido?

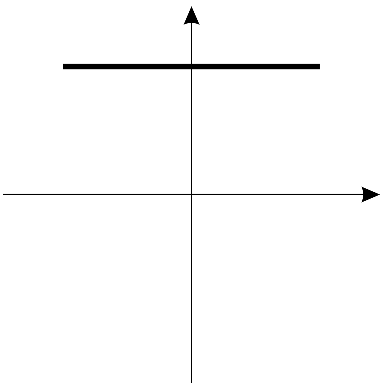
(A) $0{,}86$ **(B)** $0{,}88$ **(C)** $0{,}90$ **(D)** $0{,}92$

7. Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto $\left\{ z \in \mathbb{C} \, : \, |z| \leq 1 \ \wedge \ \arg(z) = \frac{\pi}{2} \right\}$?

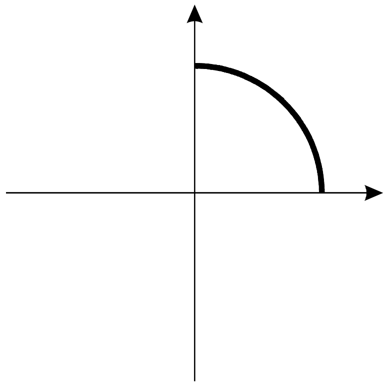
(A)



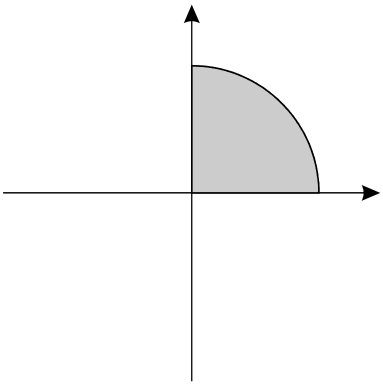
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

$z_1 = 1 + i$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. Sem recorrer à calculadora, determine o valor de $\dfrac{z_1 + i^{23} + 4}{2 - i}$

Apresente o resultado na forma algébrica.

1.2. Prove que, qualquer que seja o número natural n, a imagem geométrica de z_1^{4n+1} pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2. Considere:

- uma caixa com seis bolas, todas brancas;
- seis bolas pretas, fora da caixa;
- um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Lança-se duas vezes o dado.

Tiram-se, da caixa, tantas bolas brancas quantas o número saído no primeiro lançamento.

Colocam-se, na caixa, tantas bolas pretas quantas o número saído no segundo lançamento.

2.1. Qual é a probabilidade de a caixa ficar com seis bolas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Sejam A e B os acontecimentos:

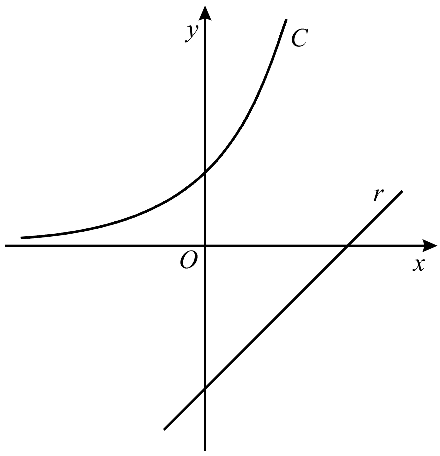
A - «*Sai face 5 no primeiro lançamento do dado*.»

B - «*Ficam, na caixa, menos bolas brancas do que pretas*.»

Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Na figura estão representadas, em referencial o. n. xOy:

- uma curva C, gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$
- uma recta r, gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - 2$



3.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

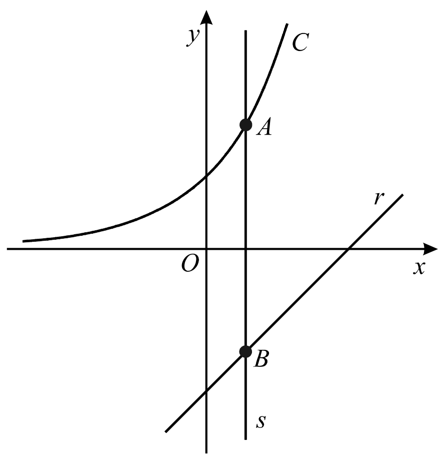
3.1.1. Determine uma equação da recta paralela à recta r e tangente à curva C.

3.1.2. Estude a função $f + g$ quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

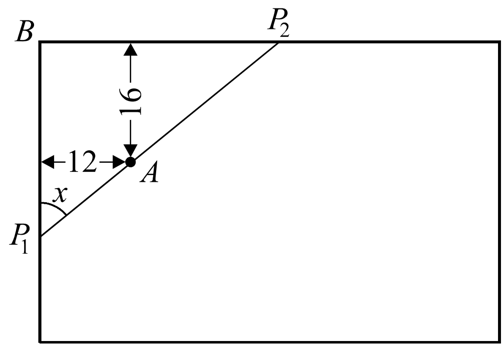
3.2. Considere agora que se acrescentou à figura anterior uma recta s, paralela ao eixo Oy.
Sejam A e B os pontos de intersecção da recta s com a curva C e com a recta r, respectivamente.
Imagine que a recta s se desloca, mantendo-se sempre paralela ao eixo Oy. Os pontos A e B acompanham, naturalmente, o deslocamento da recta s.

Seja x a abcissa do ponto A.

Recorrendo à calculadora, determine $x \in [0, 2]$ tal que $\overline{AB} = 5$. Apresente o resultado aproximado às décimas. Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).



4. Na figura está representado um lago artificial de forma rectangular.



Pretende-se construir uma ponte, ligando duas margens do lago, entre os pontos P_1 e P_2, tal como a figura ilustra.

A ponte tem um ponto de apoio A, situado a $12\ m$ de uma das margens e a $16\ m$ da outra.

Seja x a amplitude do ângulo $P_2 P_1 B$.

4.1. Mostre que o comprimento da ponte, em metros, é dado por

$$c(x) = \frac{16 \operatorname{sen} x \ + \ 12 \cos x}{\operatorname{sen} x \ \cdot \ \cos x}$$

4.2. Considerando que a localização de P_1 e de P_2 pode variar, determine o comprimento da ponte para o qual se tem $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

4.3. Admita que, num dia de Verão, a temperatura da água do lago, em graus centígrados, pode ser dada, aproximadamente, por

$$f(t) = 17 \ + \ 4 \cos \left[\frac{\pi\,(t+7)}{12} \right]$$

onde t designa o tempo, em horas, decorrido desde as zero horas desse dia.

(Considere que o argumento da função co-seno está expresso em radianos.)

Numa pequena composição, com cerca de quinze linhas, indique como varia a temperatura da água do lago, ao longo do dia.
Não deixe de referir os seguintes aspectos:

- quando é que a temperatura aumenta, e quando é que diminui;
- a que horas é que a temperatura é máxima, e qual é o valor desse máximo;
- a que horas é que a temperatura é mínima, e qual é o valor desse mínimo;
- as melhores horas para se tomar banho, admitindo que um banho só é realmente bom se a temperatura da água não for inferior a 19 graus.

Utilize a calculadora, se considerar que lhe pode ser útil.
Se o desejar, pode enriquecer a sua composição com o traçado de um ou mais gráficos.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 10
- **1.2.** 11

2. 32
- **2.1.** 16
- **2.2.** 16

3. 42
- **3.1.** 29
  - **3.1.1.** 14
  - **3.1.2.** 15
- **3.2.** 13

4. 42
- **4.1.** 13
- **4.2.** 14
- **4.3.** 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)\,.\,(\rho'\, cis\, \theta') = \rho\, \rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\; cis\, \theta}{\rho'\, cis\, \theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\; cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\;,\; k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'\,.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'\,.\cos u$

$(\cos u)' = -u'\,.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,.\,e^u$

$(a^u)' = u'\,.\,a^u\,.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$