

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
2.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

V.S.F.F.

435.V1/1

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 + e^x & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 3x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Relativamente à continuidade da função h , no ponto 0 , qual das afirmações seguintes é verdadeira?

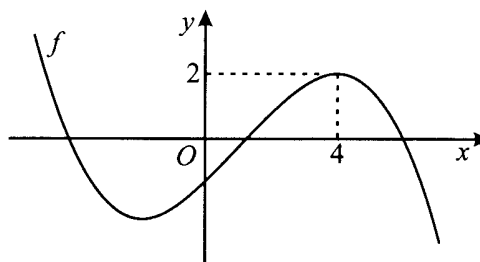
- (A) É contínua
- (B) É contínua à esquerda e descontínua à direita
- (C) É contínua à direita e descontínua à esquerda
- (D) É descontínua à esquerda e à direita

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f , polinomial do terceiro grau.

2 é um máximo relativo da função f .

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - 2$

Quantos são os zeros da função g ?



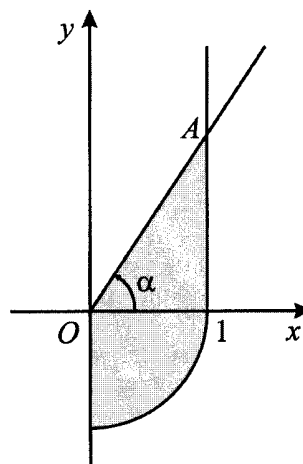
- (A) um
- (B) dois
- (C) três
- (D) quatro

V.S.F.F.

435.V1/3

3. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy :

- um quarto de círculo, de centro na origem e raio 1
- uma semi-recta paralela ao eixo Oy , com origem no ponto $(1, 0)$
- um ponto A pertencente a esta semi-recta
- um ângulo de amplitude α , cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}A$



Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada, em função de α ?

(A) $\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$

(B) $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}$

(C) $\pi + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$

(D) $\pi + \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}$

4. Considere as funções f e g , de domínio $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = 2^x \quad \text{e} \quad g(x) = 3^x$$

Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$?

- (A) Conjunto vazio (B) $\mathbb{R}^-$ (C) $\mathbb{R}^+$ (D) $\mathbb{R}$

5. Num curso superior existem dez disciplinas de índole literária, das quais três são de literatura contemporânea.

Um estudante pretende inscrever-se em seis disciplinas desse curso.

Quantas escolhas pode ele fazer se tiver de se inscrever em, pelo menos, duas disciplinas de literatura contemporânea?

(A) ${}^3C_2 + {}^7C_4 \times {}^7C_3$

(B) ${}^3C_2 + {}^7C_4 + {}^7C_3$

(C) ${}^3C_2 \times {}^7C_4 \times {}^7C_3$

(D) ${}^3C_2 \times {}^7C_4 + {}^7C_3$

6. Seja E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Tem-se que:

$$P(A \cap B) = 10\%$$

$$P(A) = 60\%$$

$$P(A \cup B) = 80\%$$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

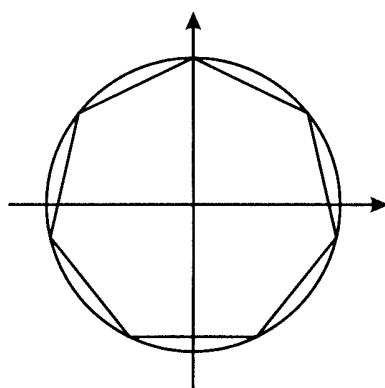
(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{2}$

7. Na figura está representado, no plano complexo, um heptágono regular inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1. Um dos vértices do heptágono pertence ao eixo imaginário.



Os vértices do heptágono são, para um certo número natural n , as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo z .

Qual é o valor de z ?

(A) $1 + i$

(B) $1 - i$

(C) i

(D) $-i$

V.S.F.F.

435.V1/5

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

$$z_1 = 4i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária}).$$

- 1.1. No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos quatro vértices de um losango de perímetro 20, centrado na origem do referencial. Determine os números complexos cujas imagens geométricas são os restantes vértices do losango.

- 1.2. Sem recorrer à calculadora, resolva a equação $\left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot z = 2 + z_1$.
Apresente o resultado na forma algébrica.

2. Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em quilogramas), por

$$A(p) = -0,52 + 0,55 \ln(p) \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

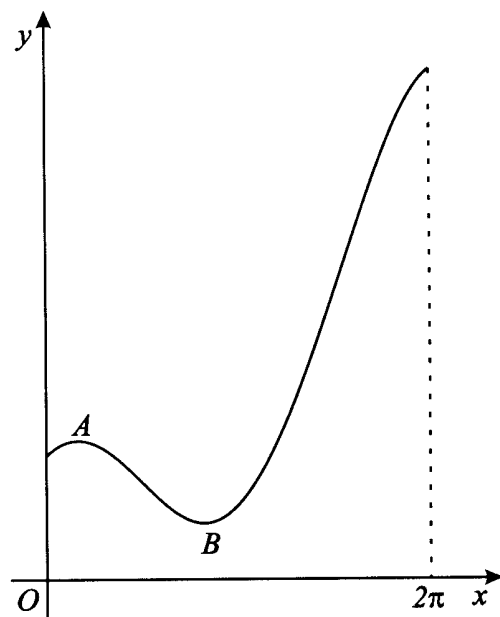
- 2.1. O Ricardo tem 1,4 m de altura. Admitindo que a altura e o peso do Ricardo estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso?

Apresente o resultado em quilogramas, arredondado às unidades.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

- 2.2. Verifique que, para qualquer valor de p , a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (com duas casas decimais) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

3. Na figura está representado o gráfico da função f , de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = x + 2 \cos x$



A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de f

3.1. Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

3.1.1. Mostre que a ordenada do ponto A é $\frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ e que a do ponto B é $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$

3.1.2. Qual é o contradomínio de f ?

3.2. Considere a recta tangente ao gráfico de f no ponto A .

Esta recta intersecta o gráfico num outro ponto C .

Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa do ponto C (apresente o resultado arredondado às décimas).

Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

V.S.F.F.

435.V1/7

4. De uma função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a bissetriz dos quadrantes ímpares é uma assíntota do seu gráfico.

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

Prove que o eixo Ox é uma assíntota do gráfico de h .

5. Três casais, os Nunes, os Martins e os Santos, vão ao cinema.

- 5.1. Ficou decidido que uma mulher, escolhida ao acaso de entre as três mulheres, paga três bilhetes, e que um homem, escolhido igualmente ao acaso de entre os três homens, paga outros três bilhetes.

Qual é a probabilidade de o casal Nunes pagar os seis bilhetes? Apresente o resultado na forma de fracção.

- 5.2. Considere o seguinte problema:

Depois de terem comprado os bilhetes, todos para a mesma fila e em lugares consecutivos, as seis pessoas distribuem-nos ao acaso entre si. Supondo que cada pessoa se senta no lugar correspondente ao bilhete que lhe saiu, qual é a probabilidade de os membros de cada casal ficarem juntos, com o casal Martins no meio?

Numa pequena composição, com cerca de quinze linhas, explique por que razão $\frac{2^4}{6!}$ é uma resposta correcta a este problema.

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do número de casos possíveis;
- explicação do número de casos favoráveis.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I63

Cada resposta certa +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II137

1. 21
 1.1. 10
 1.2. 11

2. 28
 2.1. 14
 2.2. 14

3. 41
 3.1. 28
 3.1.1. 14
 3.1.2. 14
 3.2. 13

4. 15

5. 32
 5.1. 14
 5.2. 18

TOTAL200

V.S.F.F.

435.V1/9

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Círculo: πr^2 (r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – raio)

Volumes

Prisma: $Área\ da\ base \times Altura$

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta) \cdot (\rho' \operatorname{cis} \theta') = \rho \rho' \operatorname{cis} (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \operatorname{cis} \theta}{\rho' \operatorname{cis} \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \operatorname{cis} (\theta - \theta')$$

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$