

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2001

2.ª FASE
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

V.S.F.F.

435.V1/1

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Para um certo valor de k , é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

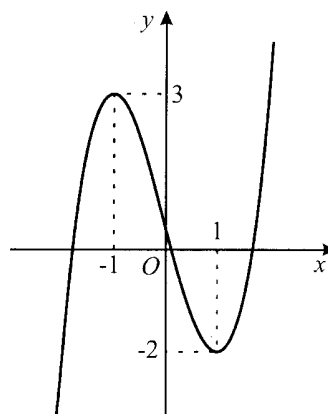
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(x + k) & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Qual é o valor de k ?

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

2. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g , polinomial do terceiro grau.

A função g admite máximo relativo igual a 3 para $x = -1$ e admite mínimo relativo igual a -2 para $x = 1$.



Qual é o conjunto dos valores de b para os quais a equação $g(x) = b$ tem três soluções distintas?

- (A) $] -\infty, 3[$ (B) $] -2, +\infty[$ (C) $[-2, 3]$ (D) $] -2, 3[$

V.S.F.F.

435.V1/3

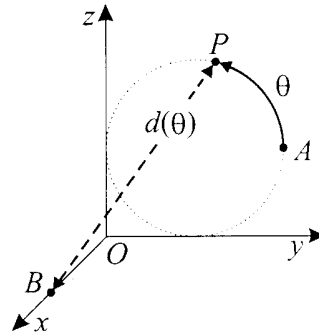
3. Seja f uma função tal que a sua derivada, no ponto 3, é igual a 4.

Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 4 (D) 0

4. Na figura estão representados, em referencial o.n. $Oxyz$:

- uma circunferência de raio 1, centrada no ponto $(0, 1, 1)$ e contida no plano yOz
- o ponto $A(0, 2, 1)$
- o ponto B , pertencente ao semieixo positivo Ox

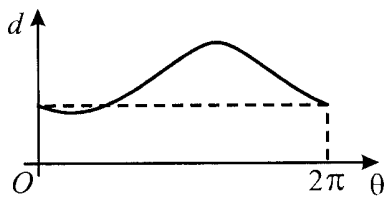


Considere que um ponto P , partindo de A , se desloca sobre essa circunferência, dando uma volta completa, no sentido indicado na figura.

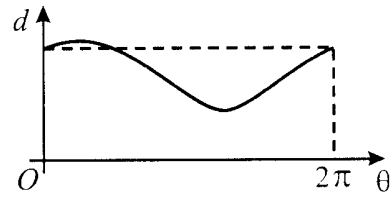
Para cada posição do ponto P , seja θ a amplitude, em radianos, do arco AP ($\theta \in [0, 2\pi)$) e seja $d(\theta)$ a distância de P ao ponto B .

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d ?

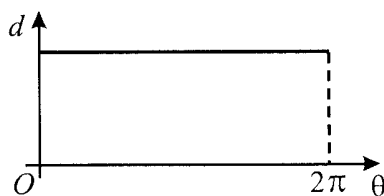
(A)



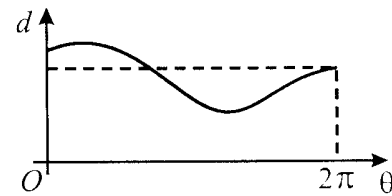
(B)



(C)



(D)



5. Num certo país existem três empresas operadoras de telecomunicações móveis: A, B e C. Independentemente do operador, os números de telemóvel têm nove algarismos. Os números do operador A começam por **51**, os do B por **52** e os do C por **53**.
Quantos números de telemóvel constituídos **só por algarismos ímpares** podem ser atribuídos nesse país?

(A) 139 630 (B) 143 620 (C) 156 250 (D) 165 340

6. Considere:
- uma caixa com nove bolas, indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 9;
 - um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

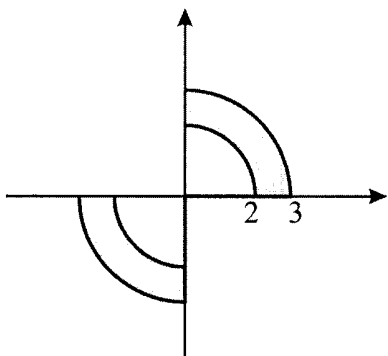
Lança-se o dado e tira-se, ao acaso, uma bola da caixa.

Qual é a probabilidade de os números saídos serem **ambos menores que 4**?

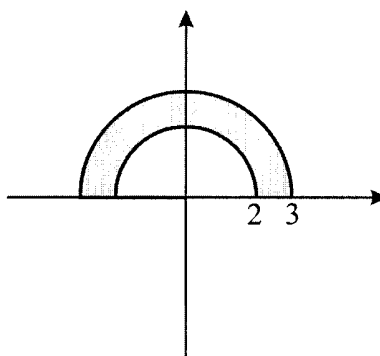
(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{5}{27}$ (D) $\frac{5}{54}$

7. Qual das seguintes regiões do plano complexo (indicadas a sombreado) contém as imagens geométricas das **raízes quadradas** de $3 + 4i$?

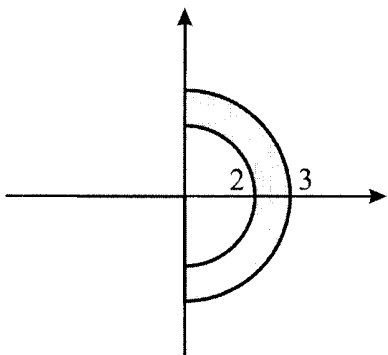
(A)



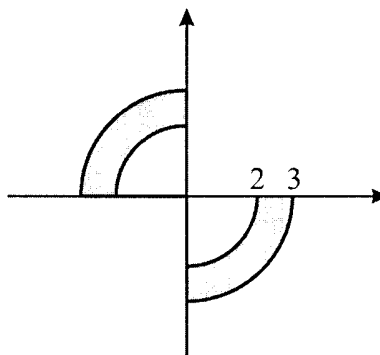
(B)



(C)



(D)



V.S.F.F.

435.V1/5

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$w = 2 + i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária}).$$

- 1.1. Determine $(w - 2)^{11} (1 + 3i)^2$ na forma algébrica.

- 1.2. Averigüe se o inverso de w é, ou não, $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$.

2. Um petroleiro, que navegava no oceano Atlântico, encalhou numa rocha e sofreu um rombo no casco. Em consequência disso, começou a derramar crude. Admita que, às t horas do dia a seguir ao do acidente, a área, em km^2 , de crude espalhado sobre o oceano é dada por

$$A(t) = 16 e^{0,1t}, \quad t \in [0, 24]$$

- 2.1. Verifique que, para qualquer valor de t , $\frac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante.

Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às décimas) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

- 2.2. Admita que a mancha de crude é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou. Sabendo que esse local se encontra a sete quilómetros da costa, determine a que horas, do dia a seguir ao do acidente, a mancha de crude atingirá a costa.

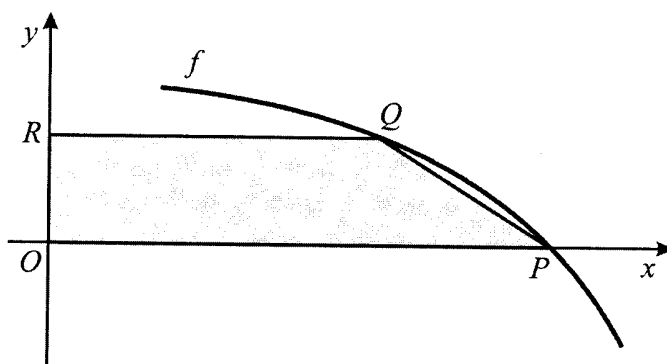
Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Considere a função f , de domínio $] -\pi, \pi[$, definida por $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$

Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

- 3.1. Estude a função quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.
- 3.2. Mostre que a função f tem um máximo e determine-o.
- 3.3. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , uma parte do gráfico da função f .



Na mesma figura está também representado um trapézio $[OPQR]$.

O ponto O é a origem do referencial, e os pontos P e R pertencem aos eixos Ox e Oy , respectivamente.

Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f .

Sabendo que o ponto R tem ordenada $\frac{1}{3}$, determine a área do trapézio.

4. De uma função g , contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- 1 é zero de g ;
- $g(3) > 0$.

Prove que a equação $g(x) = \frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, 3[$

V.S.F.F.

435.V1/7

5. Uma turma do 12.º ano é constituída por vinte e cinco alunos (quinze raparigas e dez rapazes). Nessa turma, vai ser escolhida uma comissão para organizar uma viagem de finalistas.

A comissão será formada por três pessoas: um **presidente**, um **tesoureiro** e um responsável pelas **relações públicas**.

- 5.1. Se o delegado de turma tivesse obrigatoriamente de fazer parte da comissão, podendo ocupar qualquer um dos três cargos, quantas comissões distintas poderiam ser formadas?

- 5.2. Admita agora que o delegado de turma pode, ou não, fazer parte da comissão.

- 5.2.1. Quantas comissões mistas distintas podem ser formadas?

Nota: Entenda-se por comissão mista uma comissão constituída por jovens que não são todos do mesmo sexo.

- 5.2.2. Suponha que a escolha dos três elementos vai ser feita por sorteio, da seguinte forma:

Cada aluno escreve o seu nome numa folha de papel. As vinte e cinco folhas são dobradas e introduzidas num saco. Em seguida, retiram-se do saco, sucessivamente, três folhas de papel. O primeiro nome a sair corresponde ao do presidente, o segundo, ao do tesoureiro, e o terceiro, ao do responsável pelas relações públicas.

Sejam A , B e C os acontecimentos:

A : «o presidente é uma rapariga»;

B : «o tesoureiro é uma rapariga»;

C : «a comissão é formada só por raparigas».

Indique o valor da probabilidade condicionada $P(C|(A \cap B))$ e, numa pequena composição, com cerca de dez linhas, justifique a sua resposta.

Nota: Não aplique a fórmula da probabilidade condicionada. O valor pedido deverá resultar **exclusivamente** da interpretação de $P(C|(A \cap B))$, no contexto do problema.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I63

Cada resposta certa +9
Cada resposta errada..... -3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II137

1. 21
 1.1. 10
 1.2. 11

2. 28
 2.1. 14
 2.2. 14

3. 42
 3.1. 14
 3.2. 14
 3.3. 14

4. 14

5. 32
 5.1. 10
 5.2. 22
 5.2.1. 10
 5.2.2. 12

TOTAL 200

V.S.F.F.

435.V1/9

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Círculo: πr^2 (r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – raio)

Volumes

Prisma: $Área\ da\ base \times Altura$

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta) \cdot (\rho' \operatorname{cis} \theta') = \rho \rho' \operatorname{cis}(\theta + \theta')$

$\frac{\rho \operatorname{cis} \theta}{\rho' \operatorname{cis} \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \operatorname{cis}(\theta - \theta')$

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$