

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)  
 Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos  
 2001

2.ª FASE

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

COTAÇÕES

Grupo I .....63

Cada resposta certa ..... +9  
 Cada resposta errada..... - 3  
 Cada questão não respondida ou anulada ..... 0

**Nota:**

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II .....137

1. .... 21  
     1.1. .... 10  
     1.2. .... 11  
 2. .... 28  
     2.1. .... 14  
     2.2. .... 14  
 3. .... 42  
     3.1. .... 14  
     3.2. .... 14  
     3.3. .... 14  
 4. .... 14  
 5. .... 32  
     5.1. .... 10  
     5.2. .... 22  
         5.2.1. .... 10  
         5.2.2. .... 12

TOTAL ..... 200

V.S.F.F.

435/C/1

---

## CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

### Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	C	D	A	B	C	B	A
Versão 2	B	C	D	D	A	B	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

### Grupo II

#### Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicitar todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

## Critérios específicos

1.1. .... 10

$$(w - 2)^{11} (1 + 3i)^2 =$$

$$= -i(-8 + 6i) \dots\dots\dots 8 (4+4)$$

$$= 6 + 8i \dots\dots\dots 2$$

1.2. .... 11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, seis processos:

### 1.º Processo

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \dots\dots\dots 5$$

$$\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} = -1 + i \dots\dots\dots 4$$

Conclusão ..... 2

### 2.º Processo

$$\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} = -1 + i \dots\dots\dots 4$$

$$\frac{1}{-1+i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \dots\dots\dots 5$$

Conclusão ..... 2

### 3.º Processo

$$\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} = -1 + i \dots\dots\dots 4$$

$$(-1 + i)(2 + i) = -3 + i \dots\dots\dots 5$$

Conclusão ..... 2

V.S.F.F.

435/C/3

**4.º Processo**

$$|w| = \sqrt{5} \dots\dots\dots 3$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \neq \sqrt{2} \dots\dots\dots 6$$

Conclusão ..... 2

**5.º Processo**

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \quad (\text{ver nota}) \dots\dots\dots 5$$

Referir que a imagem geométrica de  $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$  pertence ao 4.º quadrante, enquanto a imagem geométrica de  $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$  pertence ao 2.º quadrante ..... 4

Conclusão ..... 2

**Nota:**

Em vez de determinar o inverso de  $w$ , o examinando pode referir que, como a imagem geométrica de  $w$  pertence ao 1.º quadrante, a imagem geométrica do inverso de  $w$  pertence ao 4.º quadrante.

**6.º Processo**

$$\frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \quad (\text{ver nota}) \dots\dots\dots 5$$

Referir que a imagem geométrica de  $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left( -\frac{3\pi}{4} \right)$  pertence ao 3.º quadrante, enquanto a imagem geométrica de  $w$  pertence ao 1.º quadrante ..... 4

Conclusão ..... 2

**Nota:**

Em vez de determinar o inverso de  $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$ , o examinando pode referir que, como a imagem geométrica de  $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$  pertence ao 2.º quadrante, a imagem geométrica do seu inverso pertence ao 3.º quadrante.

**2.1. .... 14**

$$\frac{A(t+1)}{A(t)} = \frac{16 e^{0,1(t+1)}}{16 e^{0,1t}} \dots\dots\dots 3$$

$$\frac{16 e^{0,1(t+1)}}{16 e^{0,1t}} = e^{0,1} \dots\dots\dots 4$$

$$e^{0,1} \approx 1,1 \dots\dots\dots 2$$

Interpretação («Se a mancha de crude tem uma certa área num dado instante, passada uma hora, essa área vem multiplicada por 1,1» **ou** «A área de crude espalhado sobre o oceano aumenta à razão de 1,1 por hora» **ou** «A área de crude espalhado sobre o oceano aumenta 10% por hora») .....5

**2.2. .... 14**

Determinar a área do círculo de raio 7 ..... 2

Equacionar o problema ..... 2

Resolver a equação analiticamente ou graficamente (recorrendo às capacidades gráficas da calculadora) ..... 7

$$16 e^{0,1t} = 49 \pi$$

$$\Leftrightarrow e^{0,1t} = \frac{49 \pi}{16} \dots\dots\dots 1$$

$$\Leftrightarrow 0,1t = \ln\left(\frac{49 \pi}{16}\right) \dots\dots\dots 4$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{49 \pi}{16}\right)}{0,1} \dots\dots\dots 1$$

$$t \approx 22,640 \dots\dots\dots 1$$

**ou**

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação (**ver nota 1**)..... 4

$$t \approx 22,640 \text{ (**ver nota 2**)} \dots\dots\dots 3$$

Solução pedida ( 22 horas e 38 minutos) ..... 3

**Notas:**

1. A explicação do método utilizado deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando apresenta o gráfico da função  $A$  e a recta de equação  $y = 49\pi$  e assinala correctamente o ponto de intersecção, **ou** não apresenta qualquer gráfico, mas refere a utilização de ferramentas da calculadora (por exemplo: *Intersect*, *Zoom*, *Trace*...) que evidenciem a procura do referido ponto..... 4

O examinando não apresenta qualquer gráfico nem qualquer explicação, ou limita-se a apresentar uma referência do tipo «Vi na calculadora»..... 0

2. A solução da equação deve ser cotada, independentemente de o examinando ter, ou não, explicado o método utilizado, de acordo com o seguinte critério:

Solução pertencente ao intervalo  $[22,639 ; 22,640]$  ..... 3

Solução fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo  $[22,635 ; 22,645]$  ..... 2

Solução fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo  $[22,630 ; 22,650]$  ..... 1

Outros resultados ..... 0

**3.1. .... 14**

$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = -\infty$  ..... 4

Concluir que a recta de equação  $x = -\pi$  é assíntota vertical do gráfico de  $f$  ..... 2

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = -\infty$  ..... 4

Concluir que a recta de equação  $x = \pi$  é assíntota vertical do gráfico de  $f$  ..... 2

Justificar que o gráfico de  $f$  não tem outras assíntotas ..... 2

**3.2. .... 14**

$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x (1 + \cos x) + \operatorname{sen} x \cos x}{(1 + \cos x)^2}$  ..... 3

$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)^2}$  ..... 1

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ..... 3

Estudar o sinal de  $f'$  (que pode ser apresentado através de um quadro) ..... 5

$f(0) = \frac{1}{2}$  ..... 2

**3.3. .... 14**

Abcissa de  $P = \frac{\pi}{2}$  ..... 6

Escrever a equação  $f(x) = 0$  ..... 2

Solução positiva da equação ..... 4

Abcissa de  $Q = \frac{\pi}{3}$  ..... 6

Escrever a equação  $f(x) = \frac{1}{3}$  ..... 2

Solução positiva da equação ..... 4

Área pedida =  $\frac{5\pi}{36}$  ..... 2

**4. .... 14**

Referir que  $0 < \frac{g(3)}{2} < g(3)$  ..... 7

Evocar o Teorema de Bolzano para concluir o pretendido ..... 7

**5.1. .... 10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

**1.º Processo**

Número pedido =  $3 \times {}^{24}A_2$  (ver nota) ..... 9

Número pedido = 1 656 ..... 1

**V.S.F.F.**

435/C/7

**2.º Processo**

Número pedido =  ${}^{24}C_2 \times 3!$  (ver nota) ..... 9  
Número pedido = 1 656 ..... 1

**Nota:**

Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita do número pedido, com a respectiva cotação a atribuir.

Número correcto ..... 9  
 ${}^{24}A_2$  ..... 5  
 ${}^{24}C_2$  ..... 3

**5.2.1. .... 10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

**1.º Processo**

Número pedido =  ${}^{25}A_3 - ({}^{15}A_3 + {}^{10}A_3)$  (ver nota) ..... 9  
Número pedido = 10 350 ..... 1

**2.º Processo**

Número pedido =  $3 \times 15 \times {}^{10}A_2 + 3 \times 10 \times {}^{15}A_2$  (ver nota) ..... 9  
Número pedido = 10 350 ..... 1

**3.º Processo**

Número pedido =  $15 \times {}^{10}C_2 \times 3! + 10 \times {}^{15}C_2 \times 3!$  (ver nota) ..... 9  
Número pedido = 10 350 ..... 1

**Nota:**

Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita do número pedido, com a respectiva cotação a atribuir.

Número correcto ..... 9  
 $15 \times {}^{10}A_2 + 10 \times {}^{15}A_2$  ..... 6  
 $15 \times {}^{10}C_2 + 10 \times {}^{15}C_2$  ..... 5  
 ${}^{10}A_2 + {}^{15}A_2$  ..... 3  
 ${}^{10}C_2 + {}^{15}C_2$  ..... 2  
 ${}^{10}A_3 + {}^{15}A_3$  ..... 2

Apresentam-se a seguir dois exemplos de resposta:

**Exemplo 1**

$P(C | (A \cap B))$  significa «probabilidade de a comissão ser formada só por raparigas, sabendo que, para presidente e para tesoureiro, foram sorteadas duas raparigas».

Tem-se, assim, que:

O número de casos possíveis é 23 (número de alunos que restam, após o sorteio para os cargos de presidente e tesoureiro).

O número de casos favoráveis é 13 (número de raparigas que restam, após o sorteio para os cargos de presidente e tesoureiro).

A probabilidade pedida é, por aplicação da regra de Laplace,  $\frac{13}{23}$ .

**Exemplo 2**

$P(C | (A \cap B))$  significa «probabilidade de a comissão ser formada só por raparigas, sabendo que, para presidente e para tesoureiro, foram sorteadas duas raparigas».

Tem-se, assim, que:

O número de casos possíveis é  $15 \times 14 \times 23$  (número de sequências  $M_1 M_2 A$ , em que  $M_1$  designa uma rapariga, sorteada para presidente,  $M_2$  designa uma rapariga, sorteada para tesoureira, e  $A$  designa um aluno qualquer, sorteado para relações públicas).

O número de casos favoráveis é  $15 \times 14 \times 13$  (número de sequências  $M_1 M_2 M_3$ , em que  $M_1$  designa uma rapariga, sorteada para presidente,  $M_2$  designa uma rapariga, sorteada para tesoureira, e  $M_3$  designa uma rapariga qualquer, sorteada para relações públicas).

A probabilidade pedida é, por aplicação da regra de Laplace,  $\frac{15 \times 14 \times 13}{15 \times 14 \times 23} = \frac{13}{23}$

Tal como os exemplos atrás ilustram, para que a composição possa ser considerada completa deverá contemplar os seguintes pontos:

- o significado de  $P(C | (A \cap B))$ , no contexto da situação descrita
- a explicação do número de casos possíveis
- a explicação do número de casos favoráveis
- a conclusão, fundamentada nos três pontos anteriores, de que a probabilidade pedida é  $\frac{13}{23}$

V.S.F.F.

435/C/9

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada.

<b>Forma</b> <b>Conteúdo</b>	Nível 1 (*)	Nível 2 (**)	Nível 3 (***)
A composição contempla os quatro pontos.	12	10	8
A composição contempla três pontos.	9	7	5
A composição contempla dois pontos.	7	5	3
A composição contempla um ponto.	3	2	1

- (\*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).
- (\*\*) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.
- (\*\*\*) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia.

**Nota:**

Se o examinando apresentar o valor da probabilidade pedida  $\left(\frac{13}{23}\right)$ , sem qualquer justificação, deverá ser atribuído 1 ponto à sua resposta.