EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos **Militares**
2001

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função par, de domínio $\mathbb{R}$, que não admite zeros.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

(A) $f(x) = x^2$

(B) $f(x) = e^x$

(C) $f(x) = \cos x$

(D) $f(x) = \pi$

2. Considere uma função g, de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-4, 1]$.

Seja h a função definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = |g(x) + 1|$

Qual é o contradomínio de h ?

(A) $[0, 2]$

(B) $[0, 3]$

(C) $[0, 4]$

(D) $[-2, 3]$

3. Seja f uma função de domínio $[0, +\infty[$

Na figura 1 está parte da representação gráfica da função f' e, na figura 2, parte da representação gráfica da função f'', respectivamente **primeira** e **segunda** derivadas de f.

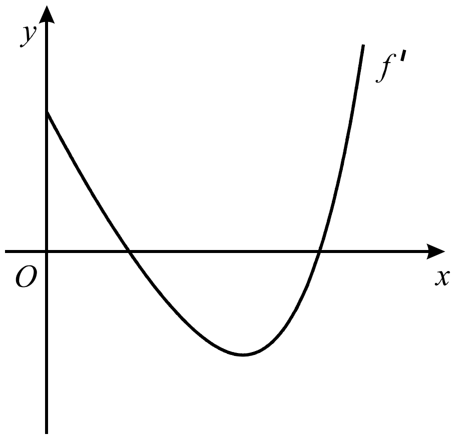


Figura 1

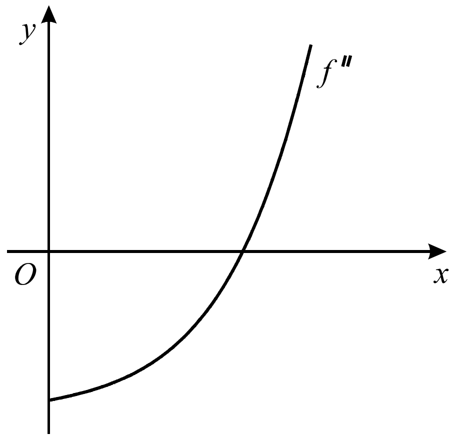
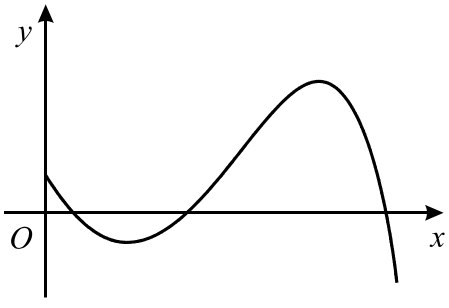


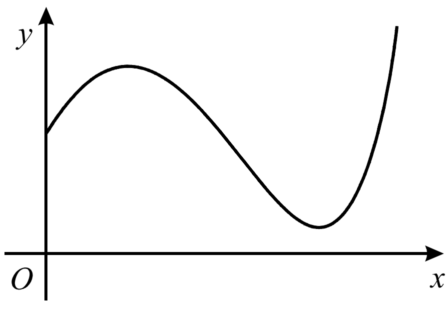
Figura 2

Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica da função f ?

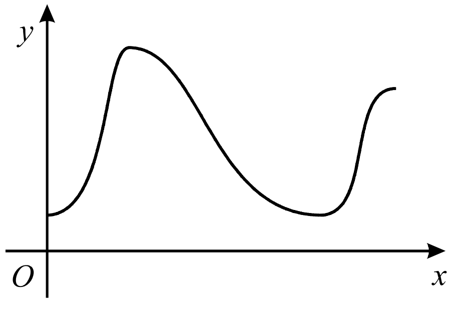
(A)



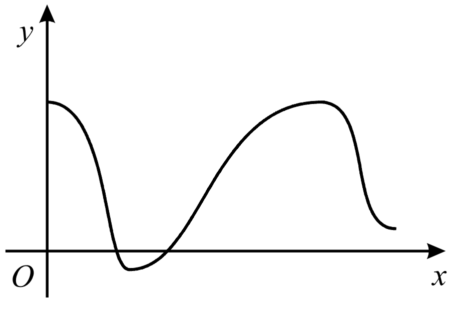
(B)



(C)



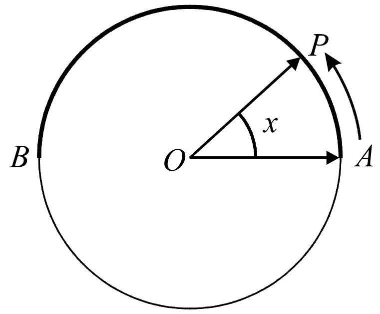
(D)



4. Na figura abaixo está representada uma circunferência de centro O e raio 1.

Os pontos A e B são extremos de um diâmetro da circunferência.

Considere que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre o arco AB, terminando o seu percurso em B.

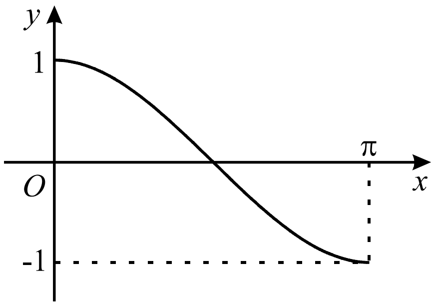


Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo AOP.

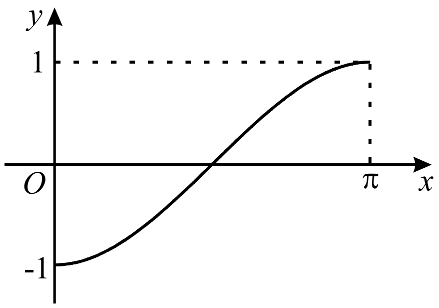
Seja f a função que, a cada valor de $x \in [0, \pi]$, faz corresponder o valor do produto escalar $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função f ?

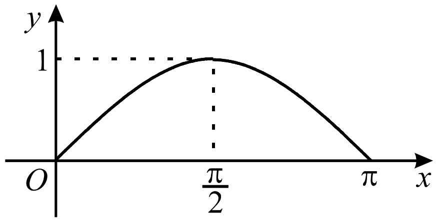
(A)



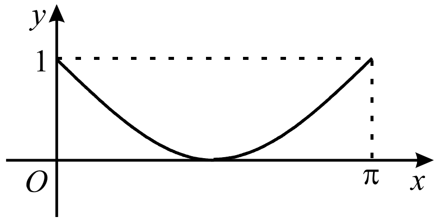
(B)



(C)



(D)



5. A soma dos três primeiros elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 121. Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

(A) 78 **(B)** 91

(C) 120 **(D)** 136

6. Os alunos de uma turma fizeram as seguintes opções, em relação à escolha das línguas estrangeiras:

- 25% dos estudantes escolheram a disciplina de Inglês (podendo, ou não, ter escolhido Alemão);
- 15% escolheram a disciplina de Alemão (podendo, ou não, ter escolhido Inglês);
- 10% escolheram ambas as disciplinas.

Um estudante dessa turma é seleccionado aleatoriamente. Sabendo que ele escolheu Inglês, qual é a probabilidade de ter escolhido também Alemão?

(A) $\frac{4}{5}$ **(B)** $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

7. Qual dos seguintes números complexos tem a sua imagem geométrica no interior do círculo de centro na origem e de raio 1 ?

(A) $\left(\frac{1}{2}\, cis\, \frac{\pi}{7}\right)^3$ **(B)** $\left(2\, cis\, \frac{\pi}{7}\right)^3$

(C) $1+i$ **(D)** $2\,i$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \rho \, cis \, \frac{\pi}{3} \qquad (\rho \in \mathbb{R}^+)$$

$$z_2 = 2\,i \times z_1$$

1.1. Determine, na forma trigonométrica, as raízes quadradas de $\dfrac{z_1}{|z_1|}$

1.2. Sejam A e B as imagens geométricas, no plano complexo, de z_1 e de z_2, respectivamente. Seja O a origem do referencial.
Sabendo que a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 16, determine, na forma algébrica, o número complexo z_1

2. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x + \text{sen}\,\dfrac{\pi}{x}$

2.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as três alíneas seguintes:

2.1.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas não verticais do seu gráfico.

2.1.2. Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 2.

2.1.3. Prove que, no intervalo $]1, +\infty[$, a função f não tem zeros.

2.2. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o número de zeros da função f, no intervalo $\left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$

Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta.

3. A Sofia preparou um pudim, para servir como sobremesa ao jantar. Depois de o ter confeccionado, a Sofia colocou o pudim a arrefecer, na bancada da cozinha. Uma hora depois, colocou-o no frigorífico, para ficar bem frio.
Admita que a temperatura do pudim, em graus centígrados, t minutos depois de ter sido colocado na bancada, é dada, para um certo valor de A, por

$$f(t) = \begin{cases} 20 + 80 \times 2^{-0{,}05\,t}, & 0 \leq t < 60 \\ \\ 6 + A \times 2^{-0{,}05\,(t-60)}, & t \geq 60 \end{cases}$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1. Atendendo a que a função f é contínua, mostre que $A = 24$

3.2. Quanto tempo deverá o pudim estar **no frigorífico**, para que a sua temperatura fique igual a doze graus? Apresente o resultado em minutos.

4. Uma caixa contém bolas brancas e bolas pretas, num total de doze bolas. Considere a experiência aleatória que consiste na extracção sucessiva, **com reposição**, de duas bolas.

Seja X a variável que representa o número de **bolas brancas** extraídas. Na tabela seguinte encontra-se representada a distribuição de probabilidades da variável X.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

4.1. Represente, através de uma tabela, a distribuição de probabilidades da variável Y: «número de **bolas pretas** extraídas»**.**

4.2. Quantas bolas brancas e quantas bolas pretas tem a caixa? Justifique a sua resposta.

5. Considere o seguinte problema:
Utilizando os cinco algarismos do número $41\,123$*, quantos números podem ser formados?*

$^5C_2 \times 3!$ e $^5A_3$ são duas respostas correctas.

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique o raciocínio que conduziu a cada uma dessas respostas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21

1.1. 10
1.2. 11

2. 56

2.1. 42
2.1.1. 14
2.1.2. 14
2.1.3. 14

2.2. 14

3. 28

3.1. 14
3.2. 14

4. 20

4.1. 10
4.2. 10

5. 12

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)\,.\,(\rho'\, cis\, \theta') = \rho\, \rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'\,.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'\,.\,\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'\,.\,\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,.\,e^u$

$(a^u)' = u'\,.\,a^u\,.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$