EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos **PROVA MODELO**

2001

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 32
  1.1. 20
    1.1.1. 10
    1.1.2. 10
  1.2. 12

2. 21
  2.1. 10
  2.2. 11

3. 36
  3.1. 28
    3.1.1. 12
    3.1.2. 16
  3.2. 8

4. 16
  4.1. 8
  4.2. 8

5. 32
  5.1. 17
  5.2. 15

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	B	A	C	D	C	D	A
Versão 2	A	B	C	D	A	A	B

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1.1. .... **10**

Escrever correctamente os dados do problema numa tabela (ou num diagrama em árvore, ou num diagrama de Venn, ...), como se exemplifica a seguir 4

	A	$\overline{A}$	Total
R	15%		
$\overline{R}$		20%	
Total	45%		

Probabilidade pedida $= 35\%$ 6

$P(A \cap \overline{R}) = 30\%$ 1

$P(\overline{R}) = 50\%$ 1

$P(R) = 50\%$ 2

$P(\overline{A} \cap R) = 35\%$ 2

ou

$P(A \cap \overline{R}) = 30\%$ 1

$P(\overline{A} \cap R) = 100\% - (30\% + 15\% + 20\%)$ 4

$P(\overline{A} \cap R) = 35\%$ 1

ou

$P(\overline{A}) = 55\%$ 3

$P(\overline{A} \cap R) = 35\%$ 3

Nota:
Se o examinando não apresentar o resultado na forma de percentagem, deverá ser penalizado em 1 ponto.

1.1.2. .... **10**

Identificar a probabilidade pedida com $P\,(R|A)$ 3

$P\,(R|A) = \dfrac{P(R \cap A)}{P(A)}$ 3

$P\,(R|A) = \dfrac{0{,}15}{0{,}45}$ 3

$P\,(R|A) = \dfrac{1}{3}$ 1

1.2. .... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Número de casos possíveis $= 6\,!$

Número de casos favoráveis $= 2 \times 4\,!$

Probabilidade pedida $= \dfrac{2 \times 4\,!}{6\,!} = \dfrac{1}{15}$

2.º Processo

Número de casos possíveis $= {}^6A_2$

Número de casos favoráveis $= 2$

Probabilidade pedida $= \dfrac{2}{{}^6A_2} = \dfrac{1}{15}$

3.º Processo

Número de casos possíveis $= {}^6C_2$

Número de casos favoráveis $= 1$

Probabilidade pedida $= \dfrac{1}{{}^6C_2} = \dfrac{1}{15}$

Qualquer que seja o processo utilizado pelo examinando, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção **(ver notas 1, 2, 3 e 4)** 11

Simplificação da fracção 1

Notas:
(Estas notas têm como referência o primeiro processo. Caberá ao corrector fazer as extrapolações necessárias, caso o examinando opte por outro processo, como por exemplo o segundo ou o terceiro processos indicados na página C/4.)

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{2 \times 4!}{6!}$ (fracção correcta).. 11

$\frac{4!}{6!}$ ou $\frac{2}{6!}$ 6

Outras fracções com denominador $6!$ 3

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis, ou apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.

2.1. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$7+24i = (4+yi)^2$ 3

$7+24i = 16-y^2+8yi$ 2

$16-y^2=7 \quad \wedge \quad 8y=24$ 3

$y=3$ 2

2.º Processo

$7+24i = (x+yi)^2$ 2

$7+24i = x^2-y^2+2xyi$ 2

$x^2-y^2=7 \quad \wedge \quad 2xy=24$ 2

Substituir x por 4 2

$y=3$ 2

2.2. 11

Referir que um argumento de $z_1 \times z_2$ é igual à soma de α com um argumento de z_1 4

Referir que um argumento de z_1 pertence ao intervalo $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ 3

Concluir que um argumento de $z_1 \times z_2$ pertence ao intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ 3

Concluir que a imagem geométrica de $z_1 \times z_2$ pertence ao terceiro quadrante 1

3.1.1. .... **12**

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$ 4

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \frac{1}{2}$ 4

Conclusão 4

Não continuidade da função no ponto 0 2

Continuidade à direita, no ponto 0 2

3.1.2. .... **16**

Justificar que existe um ponto de intersecção em $[-1, 0[$
(por exemplo, resolvendo a equação $\frac{x+1}{x} = \frac{1}{3x}$).. 4

Justificar que, em cada intervalo da forma $[2(k-1)\pi, 2k\pi[$, k natural, existem dois pontos de intersecção (as soluções da equação $\operatorname{sen} x = \frac{2}{3}$) nesse intervalo 8

Conclusão 4

3.2. .... **8**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Determinar a abcissa do ponto pedido 5

Equacionar o problema: $\frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{3x}$ 2

$\frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{3x} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2}{3}$ 1

$x \approx 0,7$ **(ver nota 1)**.. 2

Determinar a ordenada do ponto pedido $(y \approx 0,5)$ **(ver nota 1)**.................... 3

2.º Processo

Determinar as coordenadas do ponto pedido com recurso à calculadora gráfica **(ver notas 1 e 2)** 8

Notas:

1. Pode acontecer que o examinando não apresente algum dos valores pedidos (abcissa e ordenada) arredondado às décimas, conforme indicado no enunciado. Neste caso, deverá ser penalizado em 1 ponto por cada valor não arredondado às décimas.

2. O examinando deve explicar como procedeu, referindo algo que evidencie a forma como utilizou a calculadora na procura das coordenadas pedidas. Tal pode ser feito reproduzindo ou descrevendo o rectângulo de visualização da calculadora. Devem ser cotadas com 0 (zero) todas as respostas sem qualquer justificação, ou que se limitem a apresentar justificações vazias de significado, como, por exemplo, «Vi na calculadora».

   A cotação **máxima** a atribuir **deverá ter em conta o grau de precisão dos valores obtidos**, de acordo com o seguinte critério:

   Abcissa

   Valor obtido correcto: $0,7$ 4

   Valor obtido igual a $0,6$ ou a $0,8$ 2

   Outros valores 0

   Ordenada

   Valor obtido correcto: $0,5$ 4

   Valor obtido igual a $0,4$ 2

   Valor obtido igual a $0,3$ ou a $0,6$ 1

   Outros valores 0

4.1. 8

Conjectura do valor do limite (que é igual a 1) **(ver nota 1)**........ 2

Explicação do processo utilizado **(ver nota 2)** 6

Notas:

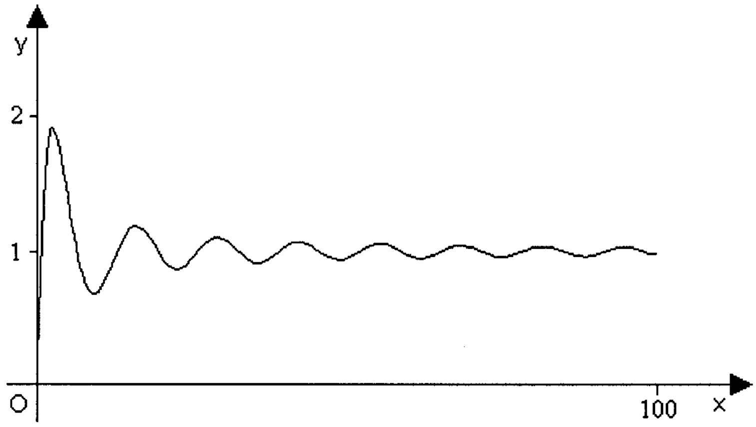
1. Estes 2 pontos só deverão ser atribuídos se o examinando apresentar alguma justificação, ainda que incompleta.

2. O processo utilizado na conjectura pode ser gráfico, pode ser baseado numa tabela, etc. As respostas deverão ser tanto mais valorizadas, quanto mais revelem a percepção clara do *conceito intuitivo* de limite de uma função, quando a variável independente tende para $+\infty$.

Apresentam-se a seguir dois exemplos de resposta:

Exemplo 1 (método gráfico)

Na figura está representado o gráfico da função, no rectângulo de visualização $[0,100] \times [0,3]$



Da análise do gráfico, podemos dizer que a recta de equação $y=1$ *parece ser uma assimptota do gráfico de* f*.*
É, assim, plausível a seguinte conjectura: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Exemplo 2 (tabela)

Apresenta-se a seguir a tabela da função f*, para valores de* x *compreendidos entre* 0 *e* 220*, com passo* 20 *(os valores de* $f(x)$ *estão arredondados às milésimas).*

x	$f(x)$
0	0,000
20	0,918
40	1,068
60	0,951
80	1,028
100	0,992
120	0,992
140	1,017
160	0,981
180	1,015
200	0,992
220	0,999

Da leitura da tabela, podemos dizer que, à medida que x *aumenta,* $f(x)$ *parece tender para* 1.
É, assim, plausível a seguinte conjectura: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

4.2. .... **8**

Afirmar que não é conclusivo 2

Justificar 6

Notas:

1. Se o examinando afirmar que, para a determinação de um limite, é conclusivo um processo baseado exclusivamente na utilização da calculadora, deverá ser cotado com 0 (zero) pontos, independentemente da justificação que dê para a sua resposta.

2. Apresentam-se a seguir dois exemplos de justificação:

   Exemplo 1

   Uma tabela como a que apresentámos acima dá-nos as imagens de uma sequência finita de valores de x, *e não de uma sucessão de valores de* x *tendendo para* $+\infty$. *Além disso, não basta conhecer o comportamento das imagens de uma sucessão particular.*
   De acordo com a definição de limite de uma função, segundo Heine, para se poder garantir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, *é necessário que, qualquer que seja a sucessão de objectos tendendo para* $+\infty$, *a correspondente sucessão das imagens tenda para* 1.
   Tal é impossível de verificar com uma calculadora, pois há infinitas sucessões naquelas circunstâncias, e cada uma delas tem infinitos termos.

   Exemplo 2 (adoptando uma linguagem mais informal)

   O comportamento da função até um certo valor de x, *por muito grande que seja, não permite garantir o comportamento da função, desse valor em diante.*
   Neste caso, vimos que, à medida que x *aumenta,* $f(x)$ *parece tender para* 1. *Mas só experimentámos valores de* x *da ordem das dezenas e das centenas.*
   A simples utilização da calculadora não permite garantir o que se passa para valores de x *muito maiores, até porque a calculadora começa a dar erro. Mas, mesmo que não desse erro, nada se poderia concluir, pois nunca seria possível experimentar uma infinidade de valores.*

5.1. .... **17**

Estudo da função quanto à monotonia 6

$$f'(t) = \frac{-5 \times 124 \times e^{-0,3t} \times (-0,3)}{(1 + 124\, e^{-0,3t})^2}$$ 1

$$f'(t) = \frac{186\, e^{-0,3t}}{(1 + 124\, e^{-0,3t})^2}$$ 1

$f'(t) > 0, \ \forall t \in [0, +\infty[$ 2

Concluir que f é estritamente crescente 2

ou

Referir que a função $t \longrightarrow -0,3t$ é estritamente decrescente 1

Referir que a função exponencial de base e é estritamente crescente 1

Concluir que a função $t \longrightarrow e^{-0,3t}$ é estritamente decrescente 1

Concluir que a função $t \longrightarrow 1 + 124\, e^{-0,3t}$ é estritamente decrescente 1

Concluir que f é estritamente crescente 2

Estudo da função quanto à existência de assimptotas 6

Justificar a não existência de assimptotas verticais 2

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$ **(ver nota)** 2

Concluir que a recta de equação $y = 5$ é assimptota horizontal do gráfico de f 2

Interpretação 5

O examinando deverá referir que, à medida que o tempo passa, o número de pessoas que sabe do acidente é cada vez maior (2 pontos), verificando-se a tendência para que todos os habitantes da povoação fiquem a saber do ocorrido (3 pontos).

Nota:

O examinando pode:

- começar por determinar $m = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t}$
- concluir que $m = 0$
- determinar, em seguida, $b = \lim\limits_{t \to +\infty} [f(t) - m\,t] = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$

Se o examinando optar por este processo, os 2 pontos previstos para o cálculo de $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ devem ser distribuídos de acordo com o seguinte critério:

$m = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t} = 0$ 1

$b = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$ 1

5.2. .... **15**

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

O segundo acidente foi testemunhado pelas mesmas pessoas que já tinham testemunhado o primeiro acidente. Portanto, o número de pessoas que testemunharam o primeiro acidente é igual ao número de pessoas que testemunharam o segundo, ou seja, $f(0) = g(0)$.

Ora, $f(0) = g(0) \Leftrightarrow \dfrac{5}{1+124\,e^0} = \dfrac{5}{1+a\,e^0} \Leftrightarrow a = 124$

Por outro lado, a progressão da notícia é mais rápida no caso do segundo acidente. Tal implica que, para cada t *positivo, se tem* $g(t) > f(t)$.

Ora, $g(t) > f(t) \Leftrightarrow \dfrac{5}{1+124\,e^{-bt}} > \dfrac{5}{1+124\,e^{-0{,}3\,t}} \Leftrightarrow b > 0{,}3$

Concluímos, assim, que a constante a *é igual à constante correspondente da função* f *e que a constante* b *é maior do que a constante correspondente da função* f.

Tal como o exemplo acima ilustra, para que a composição possa ser considerada completa, deverá contemplar os seguintes pontos:

- a explicação da razão pela qual se tem $f(0) = g(0)$
- a conclusão de que $a = 124$
- a explicação da razão pela qual se tem $g(t) > f(t)$, para cada t positivo
- a conclusão de que $b > 0,3$

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

Forma Conteúdo	Nível 1 (*)	Nível 2 (**)	Nível 3 (***)
A composição contempla os quatro pontos.	15	13	11
A composição contempla três pontos.	12	10	8
A composição contempla dois pontos.	9	7	5
A composição contempla um ponto.	6	4	2

(*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

(**) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

(***) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia.