

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)  
 Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos  
 2002

1.ª FASE  
 2.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

COTAÇÕES

**Grupo I ..... 63**

Cada resposta certa ..... +9  
 Cada resposta errada..... - 3  
 Cada questão não respondida ou anulada ..... 0

**Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

**Grupo II ..... 137**

1. .... 21  
     1.1. ....10  
     1.2. ....11  
 2. .... 28  
     2.1. ....13  
     2.2. ....15  
 3. .... 41  
     3.1. .... 26  
         3.1.1. ....10  
         3.1.2. ....16  
     3.2. ....15  
 4. .... 15  
 5. .... 32  
     5.1. ....16  
         5.1.1. ....8  
         5.1.2. ....8  
     5.2. ....16

**TOTAL ..... 200**

## CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

### Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

Pode acontecer que o examinando não respeite a indicação, expressa no enunciado, de que deverá escrever apenas a letra correspondente à alternativa seleccionada. Por exemplo: pode acontecer que ele apresente cálculos; pode acontecer que escreva, para além da letra, a resposta que lhe corresponde; pode acontecer que se esqueça de escrever a letra e escreva apenas a resposta; etc. Deverão ser consideradas (como certas ou como erradas) todas as questões em que não haja qualquer dúvida sobre a alternativa que o examinando seleccionou, mesmo que, formalmente, desrespeitem a referida indicação. Deverão ser anuladas todas as questões onde existam dúvidas sobre a alternativa seleccionada.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	C	A	A	B	B	D	B
Versão 2	C	B	B	D	D	B	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

## **Grupo II**

### **Critérios gerais**

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.
2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.
3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.
4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.
  - Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
  - Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
    - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
    - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.
  - No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
  - Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
  - Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.
5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.
6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia inequivocamente incorrecta (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), tal deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea.

## Critérios específicos

### 1.1. ....10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

#### 1.º Processo

$$\begin{aligned} \frac{-1+i}{i} &= \\ &= \frac{\sqrt{2}cis \frac{3\pi}{4}}{cis \frac{\pi}{2}} \dots\dots\dots 6 (3+3) \\ &= \sqrt{2}cis \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots 2 \end{aligned}$$

Conclusão .....2

#### 2.º Processo

$$\begin{aligned} \frac{-1+i}{i} &= 1+i \dots\dots\dots 3 \\ |w| &= \sqrt{2} \dots\dots\dots 2 \\ \text{Um argumento de } w &\text{ é } \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots 3 \\ \text{Conclusão} &\dots\dots\dots 2 \end{aligned}$$

### 1.2. ....11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

#### 1.º Processo

$$\begin{aligned} \text{Um argumento de } z_2 &\text{ é } \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 5 \\ z_2 &= 4cis \frac{5\pi}{6} \dots\dots\dots 2 \\ z_2 &= -2\sqrt{3} + 2i \dots\dots\dots 4 \end{aligned}$$

**2.º Processo**

$$z_1 = 4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 2$$

$$z = \left( 4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \right)^4 \dots\dots\dots 1$$

$$z = 4^4 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} \dots\dots\dots 1$$

$$\sqrt[4]{z} = 4 \operatorname{cis} \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}, k = 0, 1, 2, 3 \dots\dots\dots 1$$

$$z_2 = 4 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} \dots\dots\dots 2$$

$$z_2 = -2\sqrt{3} + 2i \dots\dots\dots 4$$

**2.1. ....13**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

**1.º Processo**

$$N = 10 \left[ \log_{10} (10^{12}) + \log_{10} I \right] \dots\dots\dots 6$$

$$N = 10 (12 + \log_{10} I) \dots\dots\dots 6$$

$$N = 120 + 10 \log_{10} I \dots\dots\dots 1$$

**2.º Processo**

$$N = \log_{10} (10^{12} I)^{10} \dots\dots\dots 1$$

$$N = \log_{10} (10^{120} I^{10}) \dots\dots\dots 1$$

$$N = \log_{10} (10^{120}) + \log_{10} (I^{10}) \dots\dots\dots 6$$

$$N = 120 + 10 \log_{10} I \dots\dots\dots 5$$

**2.2. ....15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

**1.º Processo**

Equacionar o problema:  $140 = 120 + 10 \log_{10} I$  .....5

$\log_{10} I = 2$  .....4

$I = 100$  .....6

**2.º Processo**

Equacionar o problema:  $140 = 10 \log_{10} (10^{12} I)$  .....5

$\log_{10} (10^{12} I) = 14$  .....1

$10^{12} I = 10^{14}$  .....6

$I = 100$  .....3

**3.º Processo**

Equacionar o problema:  $140 = 10 \log_{10} (10^{12} I)$  .....5

$140 = \log_{10} (10^{12} I)^{10}$  .....2

$10^{120} I^{10} = 10^{140}$  .....6

$I^{10} = 10^{20}$  .....1

$I = 100$  .....1

**3.1.1. ....10**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$  .....7

$f'(0) = 2$  .....3

**3.1.2. ....16**

$f''(x) = 1 - 2 \sin x$  (ver nota 1) .....3

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$  .....2

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$  .....3 (1+2)

Análise do sinal de  $f''$  (ver notas 2 e 3) .....3

Concluir que o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima em  $[-\pi, \frac{\pi}{6}]$  e em  $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$  e tem a concavidade voltada para baixo em  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  (ver notas 2 e 4).....3

Concluir que o gráfico de  $f$  tem dois pontos de inflexão, de abscissas  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{5\pi}{6}$  (ver nota 2).....2

**Notas:**

1. Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a expressão de  $f''$ , a cotação mínima a atribuir a esta etapa é de 1 ponto.
2. A análise do sinal de  $f''$  e as duas conclusões podem ser apresentadas através de um quadro.
3. Se, no quadro, o examinando não indicar correctamente o domínio da função, deverá ser penalizado em 1 ponto.
4. Se o examinando apresentar os intervalos abertos, não deverá ser penalizado. É ainda de salientar que o examinando não necessita sequer de explicitar os intervalos, tal como se depreende da nota 2.

**3.2. ....15**

Equacionar o problema:  $f'(x) = 0$  (ver nota 1)..... 8

Explicação do método utilizado para resolver a equação (ver nota 2)..... 3

Indicação do valor da abscissa pedida (ver nota 3).....4

**Notas:**

1. O examinando poderá não escrever explicitamente esta equação. Se existir evidência da procura do zero de  $f'$ , estes 8 pontos deverão ser atribuídos.

2. A explicação do método utilizado deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando apresenta o gráfico da função  $f'$  e assinala correctamente o seu zero.

**ou**

O examinando não apresenta qualquer gráfico, mas refere a utilização de ferramentas da calculadora, evidenciando a procura do referido zero .....3

O examinando não apresenta qualquer gráfico nem qualquer explicação, ou limita-se a apresentar uma referência do tipo «Vi na calculadora».....0

3. A escrita da abcissa do ponto pedido deve ser cotada, independentemente de o examinando ter, ou não, explicado o método utilizado, de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às centésimas, de acordo com o enunciado):

Resposta  $-103$  ..... 4

Resposta  $-102$  ou  $-104$  ..... 2

Resposta  $-101$  ou  $-105$  ..... 1

Outros resultados .....0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às centésimas):

Valor no intervalo  $[-1031 ; -1029]$  ..... 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo  $[-1040 ; -1020]$  .....2

Outros resultados .....0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades ou às décimas):

Valor igual a  $-1$  (ou  $-1,0$ ) ..... 1

Outros resultados .....0

4. ....15

Justificar que  $g$  é contínua (por ser a diferença de duas funções contínuas) **(ver nota 1)**.....2

Justificar que  $g(0) > 0$   
 $(g(0) = f(0) \text{ e } f(0) \in [3, 4])$  **(ver nota 2)**.....5

Justificar que  $g(5) < 0$   
 $(g(5) = f(5) - 5 \text{ e } f(5) \in [3, 4])$  **(ver nota 3)**.....6

Evocar o Teorema de Bolzano (ou o seu corolário), para concluir o pretendido .....2

**Notas:**

1. Se o examinando se limitar a referir a continuidade de  $g$ , sem justificar, deverá ser atribuída, nesta etapa, a cotação de 1 ponto, dos 2 previstos.
2. Se o examinando escrever  $f(0) = 3$ , deverá ser atribuída, nesta etapa, a cotação de 0 pontos.
3. Se o examinando escrever  $f(5) = 4$ , deverá ser atribuída, nesta etapa, a cotação de 0 pontos.

5.1.1. ....8

Escrita da fracção  $\frac{{}^4C_2 \times 8^2}{9^4}$  **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** .....7

Probabilidade pedida  $\approx 6\%$  .....1

**Notas:**

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção. No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.
2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{{}^4C_2 \times 8^2}{9^4}$  ou  $\frac{6 \times 8^2}{9^4}$  (fracção correcta).....7

$\frac{{}^4C_2 \times {}^8A_2}{9^4}$  .....4

$\frac{8^2}{9^4}$  ou  $\frac{6}{9^4}$  .....3

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.
4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverá ser atribuído 1 ponto à sua resposta.
5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 4 pontos à sua resposta.

**5.1.2. ....8**

Escrita da fracção $\frac{{}^7A_2}{9^4}$ (ver notas 1, 2, 3, 4 e 5) .....	7
Probabilidade pedida $\approx 0006$ .....	1

**Notas:**

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção. No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.
2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{{}^7A_2}{9^4}$ ou $\frac{7 \times 6}{9^4}$ (fracção correcta).....	7
---	---

$\frac{7^2}{9^4}$ .....	5
-------------------------	---

$\frac{9 \times 8}{9^4}$ .....	4
--------------------------------	---

$\frac{9^2}{9^4}$ .....	3
-------------------------	---

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.
4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverá ser atribuído 1 ponto à sua resposta.
5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 4 pontos à sua resposta.

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

*Pretende-se saber quantos números da forma 9 \_ \_ \_ existem, com algarismos todos diferentes (escolhidos de entre os algarismos de 1 a 9) e tal que a soma dos seus quatro algarismos seja par.*

*Ora, para que a soma dos quatro algarismos seja par, é necessário que a soma dos três últimos seja ímpar.*

*Para que a soma destes três algarismos seja ímpar, dois casos se podem dar: ou são todos ímpares, ou dois deles são pares e o outro é ímpar.*

*No primeiro caso, temos de escolher ordenadamente três de quatro algarismos ímpares (1, 3, 5 e 7), o que pode ser feito de  ${}^4A_3$  maneiras diferentes.*

*No segundo caso, temos de começar por escolher a posição do algarismo ímpar, o que pode ser feito de 3 maneiras diferentes. Para cada uma destas, existem 4 maneiras de escolher esse algarismo ímpar (1, 3, 5 ou 7). Para cada posição do algarismo ímpar e para cada valor deste, existem  ${}^4A_2$  maneiras diferentes de escolher ordenadamente dois de quatro algarismos pares (2, 4, 6 e 8) Assim, neste segundo caso, existem  $3 \times 4 \times {}^4A_2$  números diferentes, nas condições requeridas.*

*Logo, o número pedido é  $3 \times 4 \times {}^4A_2 + {}^4A_3$*

Tal como o exemplo acima ilustra, o examinando deverá:

- referir que a soma dos três últimos algarismos tem de ser ímpar;
- referir que, para que isso aconteça, dois casos se podem dar: ou os três algarismos referidos são ímpares, ou dois deles são pares e o terceiro é ímpar;
- explicar correctamente o valor  ${}^4A_3$  (número de maneiras de escolher ordenadamente três de quatro algarismos ímpares);
- explicar correctamente o valor 3 (número de maneiras de escolher a posição do algarismo ímpar);
- explicar correctamente o valor 4 (número de maneiras de escolher um de quatro algarismos ímpares);
- explicar correctamente o valor  ${}^4A_2$  (número de maneiras de escolher ordenadamente dois de quatro algarismos pares).

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser atribuída a cotação desta alínea.

<b>Conteúdo</b>	<b>Forma</b>	<b>Nível 1 (*)</b>	<b>Nível 2 (**)</b>	<b>Nível 3 (***)</b>
O examinando refere os seis pontos		16	14	12
O examinando refere cinco pontos		12	10	8
O examinando refere quatro pontos		8	7	6
O examinando refere três pontos		6	5	4
O examinando refere dois pontos		4	3	2
O examinando refere um ponto		2	1	1

- (\*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).
- (\*\*) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.
- (\*\*\*) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia, desde que respeite a indicação, dada nos critérios gerais, de que a cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.