# CORRECÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA

1ª Fase—2ª Chamada

## Grupo I

| Questões | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Versão 1 | C | A | A | B | B | D | B |
| Versão 2 | C | B | B | D | D | B | A |

## Grupo II

1.1.
$$w = \frac{-1+i}{i} = \frac{-1}{i} + 1 = i + 1$$
$$|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

O argumento positivo mínimo de $w$ é $\pi/4$, pois $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Im}(w) > 0$.
Donde $w \neq z_1$, porque os argumentos são diferentes, e $w \neq z_2$, porque os módulos são diferentes.

1.2. Como $z_1$ e $z_2$ são raízes quartas de um mesmo número complexo $z$, $z_1 \in 1^{\circ}Q$ e $z_2 \in 2^{\circ}Q$, então

$$\arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}.$$

Logo,

$$z_2 = 4\,cis\,\frac{5\pi}{6} = 4 \times \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i.$$

2.1.

$$N = 10 \cdot \log_{10}(10^{12} I) = 10[\log_{10}(10^{12}) + \log_{10} I] =$$
$$= 10[12 + \log_{10} I] = 120 + 10 \cdot \log_{10} I \qquad c.q.d.$$

2.2. Sendo $N = 140$ decibéis, vem:

$$140 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I \Leftrightarrow 20 = 10 \cdot \log_{10} I \Leftrightarrow 2 = \log_{10} I \Leftrightarrow I = 10^2 \Leftrightarrow I = 100$$

R: O som tem a intensidade de 100 watt por metro quadrado.

3.1.1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0+2\cos(0)=0+2\times 1=2.$$

3.1.2.
$$f''(x)=1-2\,\mathrm{sen}(x)$$

Como $x\in[-\pi,\pi]$,

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 1-2\,\mathrm{sen}(x)=0\Leftrightarrow \mathrm{sen}(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}\vee x=\frac{5\pi}{6}$$

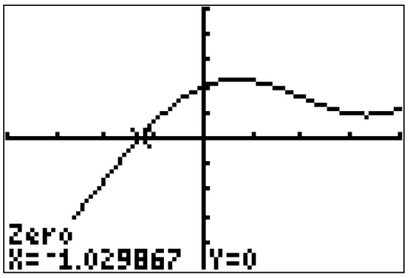
| | $-\pi$ | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | p.i. | $\cap$ | p.i. | $\cup$ |

A análise do sinal da função $f''$ decorre do facto de $\mathrm{sen}(x)$ ser superior a $1/2$ entre $\pi/6$ e $5\pi/6$ e inferior a $1/2$ nos outros intervalos assinalados no quadro.

As abcissas dos pontos de inflexão são $x=\pi/6$ e $x=5\pi/6$.

A função tem a concavidade voltada para cima nos intervalos $[-\pi,\pi/6]$ e $[5\pi/6,\pi]$ e a concavidade voltada para baixo no intervalo $[\pi/6,5\pi/6]$.

3.2. Para que uma recta paralela ao eixo $Ox$ (cujo declive é 0) seja tangente ao gráfico de $f$ num dado ponto, a derivada no mesmo terá que ser zero. Fazendo a representação gráfica da função $f'$ na calculadora e adequando a janela de visualização (p.e. $[-pi,\pi]\times[-5,5]$) verifica-se que o zero desta função ocorre para $x\approx -1.03$ que é a abcissa do ponto pretendido.




4. A função $g$ é contínua no intervalo $[0,5]$, uma vez que se trata da diferença de duas funções contínuas (a função $f$ e a função identidade).

Calculando $g(0)$ e $g(5)$, vem:

$$g(0)=f(0)-0=f(0)>0,\quad \text{pois } f(0)\in[3,4]$$

$$g(5) = f(5) - 5 < 0, \quad \text{uma vez que } 3 \leq f(5) \leq 4.$$

Como $g(0) \times g(5) < 0$, então o corolário do Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero da função $g$ no intervalo $[0, 5]$.

5.1.1. Número de casos possíveis: ${}^9A'_4 = 9^4 = 6561$.

Número de casos favoráveis: ${}^4C_2 \times {}^8A'_2 = 6 \times 8^2 = 384$, uma vez que os dois algarismos fixados ocupam 2 das 4 casas disponíveis e restam 8 algarismos para completar o número.

$$P = \frac{384}{6561} \approx 0.06, \quad \text{ou seja } 6\%.$$

5.1.2. Número de casos possíveis: ${}^9A'_4 = 9^4 = 6561$.

Número de casos favoráveis: ${}^7A_2 = 42$, uma vez que nas condições exigidas, os dois primeiros algarismos são fixos, restando 7 algarismos para preencher os dois últimos lugares.

$$P = \frac{42}{6561} \approx 0.006.$$

5.2. Para que um número de 4 algarismos tenha como soma dos mesmos um número par é necessário que se verifique uma das três hipóteses:

1ª— Os algarismos são todos pares;

2ª— Dois algarismos são pares e dois são ímpares;

3ª— Os algarismos são todos ímpares.

A primeira hipótese está posta de parte uma vez que o número tem de começar por $9$. Para a segunda hipótese se verificar, o outro algarismo ímpar terá que ser um dos $4$ ímpares restantes e pode ocupar uma das 3 posições disponíveis ($4 \times 3$). Os outros 2 algarismos terão que ser escolhidos ordenadamente de entre os $4$ algarismos pares (${}^4A_2$). Assim obtém-se: $3 \times 4 \times {}^4A_2$.

Finalmente, na hipótese de serem todos ímpares, por o primeiro já o ser, restam $4$ algarismos ímpares para ocupar ordenadamente as $3$ posições seguintes (${}^4A_3$). Tendo em conta as 2 hipóteses possíveis, uma resposta correcta a este problema é: $3 \times 4 \times {}^4A_2 + {}^4A_3$.