EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Militares**
2002

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

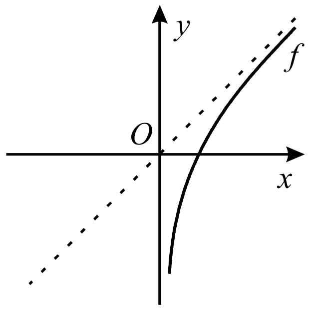
Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

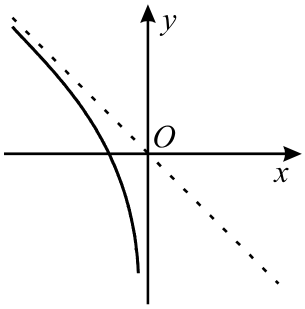
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura ao lado está a representação gráfica de uma função f e, a tracejado, parte da recta de equação $y = x$.

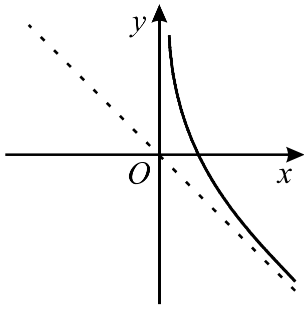
Em qual das figuras seguintes pode estar a representação gráfica da função f^{-1}, função inversa de f ?



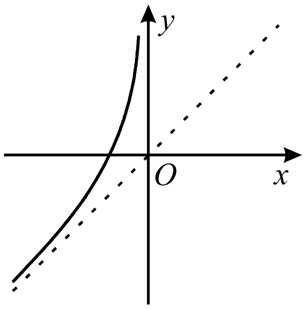
(A)



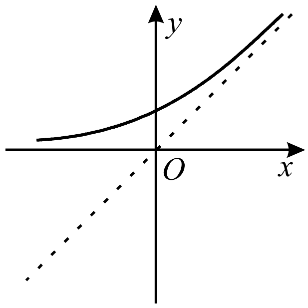
(B)



(C)



(D)



2. De uma função f, de domínio $[0, +\infty[$, sabe-se que as rectas de equações $y = 1$ e $x = 2$ são assimptotas do seu gráfico.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função f é contínua em todo o seu domínio.

(B) A função $|f|$ tem máximo absoluto.

(C) O gráfico de f não tem assimptota oblíqua.

(D) O gráfico de $-f$ não tem assimptota vertical.

3. Sejam a e b dois números reais positivos.
Qual das seguintes igualdades é equivalente a $\ln a = -\ln b$?

(A) $a + b = 1$

(B) $\frac{a}{b} = 1$

(C) $a \times b = 1$

(D) $a - b = 1$

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e a um ponto do domínio de f tal que $f'(a) = 0$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) a é zero de f

(B) $f(a)$ é extremo relativo de f

(C) $(a, f(a))$ é ponto de inflexão do gráfico de f

(D) A recta de equação $y = f(a)$ é tangente ao gráfico de f

5. A Joana comprou dez discos, todos diferentes, sendo três deles de música clássica e os restantes de Jazz. Pretende oferecer esses dez discos aos seus dois irmãos, o Ricardo e o Paulo, de modo a que

- cada irmão fique com o mesmo número de discos;
- o Ricardo fique com exactamente dois discos de música clássica.

De quantas maneiras o poderá fazer?

(A) ${}^3C_2 \times {}^7C_3$ **(B)** ${}^3C_2 \times {}^7C_3 \times {}^3C_1 \times {}^7C_4$

(C) ${}^3C_2 + {}^7C_3$ **(D)** ${}^3C_2 \times {}^7C_3 + {}^3C_1 \times {}^7C_4$

6. Numa caixa há bolas de duas cores: verdes e pretas.

O número de bolas verdes é seis.

De forma aleatória extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

A probabilidade de a segunda bola extraída ser preta, sabendo que a primeira bola extraída foi verde, é $\frac{1}{2}$.

Quantas bolas pretas havia inicialmente na caixa?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7

7. Seja w um número complexo cuja representação geométrica pertence à parte negativa do eixo real.

As representações geométricas das raízes quadradas de w pertencem a uma das rectas abaixo indicadas.

A qual delas?

(A) Eixo real
(B) Eixo imaginário
(C) Bissectriz dos quadrantes pares
(D) Bissectriz dos quadrantes ímpares

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

$z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. Determine, na forma trigonométrica, os valores, não nulos, de z para os quais $z^2 = \overline{z} \times z_1$

1.2. Represente, no plano complexo, a região do plano definida por

$$0 \leq \arg(z - z_1) \leq \frac{3\pi}{4} \quad \wedge \quad |z - z_1| \leq 1$$

2. Numa turma de vinte e cinco jovens, as suas idades e sexos estão distribuídos como indica a tabela:

Idade	Rapazes	Raparigas
15	4	2
16	5	4
17	6	4

2.1. Pretende-se escolher um jovem para representar a turma. Sabendo que esse representante é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de que tenha dezasseis anos ou seja uma rapariga? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Ao escolher dois jovens ao acaso, qual é a probabilidade de eles serem de sexo diferente e terem a mesma idade? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Considere as funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por:

$f(x) = \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e)

$g(x) = x^2 - 3$

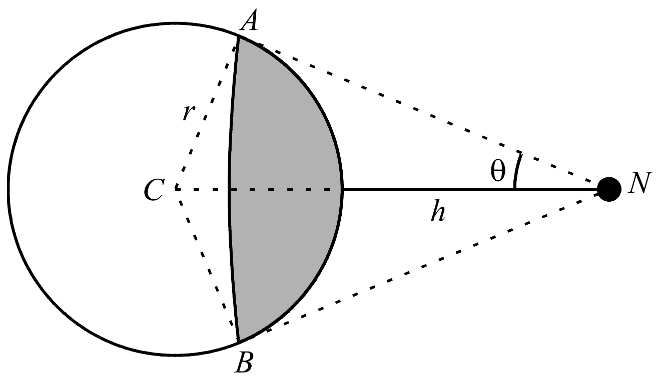
3.1. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude, quanto à monotonia, a função $f - g$

3.2. Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, investigue se todo o número x do intervalo $[0{,}1\,;\,1{,}8]$ é solução da inequação $f(x) > g(x)$. Indique a conclusão a que chegou e explique como procedeu. Deverá incluir na sua explicação os gráficos obtidos na sua calculadora.

4. Na figura está representada a Terra e uma nave espacial N.

Considere que a Terra é uma esfera de centro C e raio r.

A área da superfície da terra visível da nave, representada a sombreado na figura, é dada, em função do ângulo θ, por $f(\theta) = 2\,\pi\,r^2\,(1 - \operatorname{sen}\theta)$ $(\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\,)$.



4.1. Determine o valor de θ para o qual é visível, da nave, a quarta parte da superfície terrestre.

4.2. Designando por h a distância da nave à Terra, mostre que a área da superfície da terra visível da nave é dada, em função de h, por $g(h) = \frac{2\,\pi\,r^2 h}{r+h}$

Sugestão: tenha em conta que o ângulo CAN é recto.

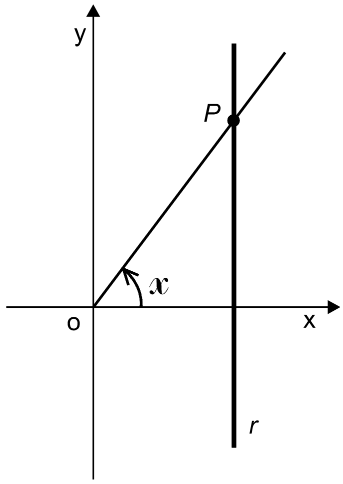
4.3. Calcule $\lim\limits_{h\to+\infty} g(h)$ e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

5. Na figura está representada, em referencial o. n. xOy, uma recta r paralela ao eixo Oy.

Considere que um ponto P se desloca ao longo de toda a recta r.

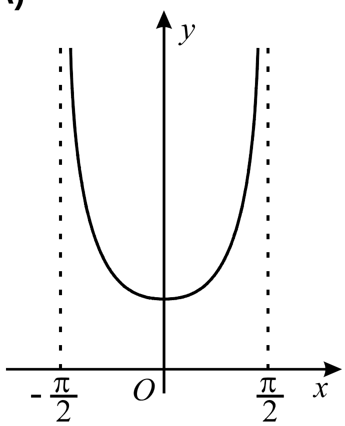
Sejam:

- x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta $\dot{O}P$;
- f a função que dá, para cada x, a distância de P à origem O do referencial.

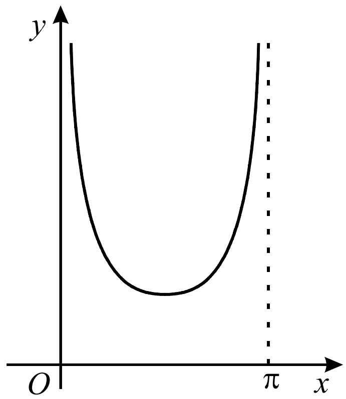


Dos gráficos seguintes, apenas um deles pode ser o da função f. Qual?
Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique por que é que os outros três estão incorrectos, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.

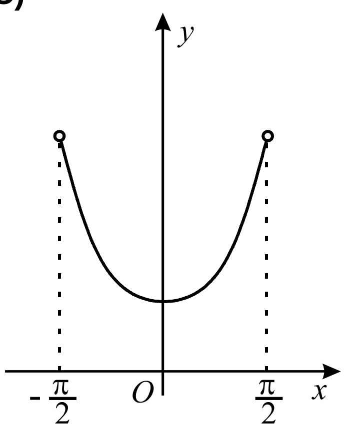
(A)



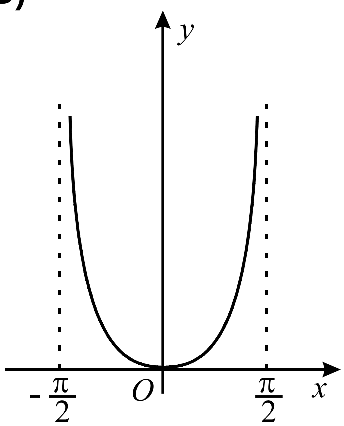
(B)



(C)



(D)



FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 32
2.1. 16
2.2. 16

3. 28
3.1. 14
3.2. 14

4. 41
4.1. 14
4.2. 14
4.3. 13

5. 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\, \pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\, \pi\, r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta) \,.\, (\rho'\, cis\, \theta') = \rho\, \rho'\, cis\, (\theta + \theta')$

$\frac{\rho\; cis\, \theta}{\rho'\, cis\, \theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\; cis\, (\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\, (n\, \theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\, k\, \pi}{n}\;,\; k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' \,.\, v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \,.\, v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \,.\, \cos u$

$(\cos u)' = -u' \,.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \,.\, e^u$

$(a^u)' = u' \,.\, a^u \,.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$