PROPOSTA DE CORRECÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA (435)

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	D	B	D	C	A	A
Versão 2	D	C	A	C	B	C	C

Grupo II

(Proposta de resolução)

1.1.

$$z_1 = \rho \operatorname{cis}\theta$$
$$\rho = |z_1| = 2\sqrt{2}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-2}{2} = -1, \quad \theta \in 4^{\text{o}} \text{ Quadrante}$$

logo

$$z_1 = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}\right) = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i.$$

1.2. Raio da circunferência: $|z_1 - z_3| = |3 - 3i| = 3\sqrt{2}$.
Condição em $\mathbb{C}$: $|z - z_1| = |z_1 - z_3|$, ou seja, $|z - z_1| = 3\sqrt{2}$.

2.1. Uma hora e trinta minutos da tarde corresponde a $t = 13,5$

$$P(13,5) = 1 - \frac{\ln(14,5)}{14,5}$$

donde, $P(13,5) \approx 0,8$.

2.2. Atendendo às condições do enunciado, o tempo pedido corresponde ao intervalo de tempo no qual a função $P(t)$ é decrescente.

$$P'(t) = \frac{\ln(t+1) - 1}{(t+1)^2}$$

Consequentemente, $P'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln(t+1) = 1 \Leftrightarrow t = e - 1$.

t	0	$e{-}1$	24
$P'(t)$	$-$	0	$+$
$P(t)$	↘	min	↗

$t = e - 1 \approx 1,718$.

O purificador de ar esteve ligado aproximadamente 1 hora e 43 minutos.

3.1. A área pedida é igual à diferença entre a área do trapézio $[ACEG]$ e a área do triângulo $[BCE]$ sendo calculada, portanto, a partir de

$$\frac{(\overline{AG} + \overline{CE}) \times \overline{AC}}{2} - \frac{\overline{BC} \times \overline{CE}}{2} = \frac{(2 + 2\operatorname{sen} x) \times (2 + 2\cos x)}{2} - \frac{2\cos x \times 2\operatorname{sen} x}{2} =$$

$$= (1 + \operatorname{sen} x)(2 + 2\cos x) - 2\cos x \operatorname{sen} x = 2 + 2\operatorname{sen} x + 2\cos x =$$

$$= 2(1 + \operatorname{sen} x + \cos x).$$

3.2.

$$A(0) = 2(1 + \operatorname{sen} 0 + \cos 0) = 4$$

.

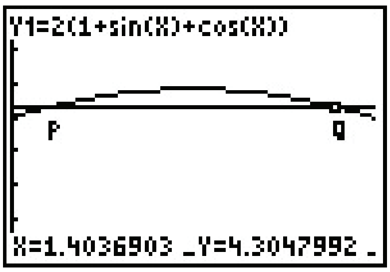
Para $x = 0$ os pontos C, D e E são coincidentes, correspondendo o polígono $[ABEG]$ ao triângulo $[ADG]$, em que a base mede 4 e a altura mede 2, logo, de área 4.

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4.$$

Para $x = \pi/2$, E coincide com F e Ccom B: o polígono $[ABEG]$ corresponde ao quadrado $[ABFG]$, de lado 2, logo, de área 4.

3.3. $A(x) = 4,3$

Os valores pedidos são as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $A(x)$ e $y = 4,3$. Inseridas estas funções na calculadora gráfica, percorre-se o gráfico de $A(x)$ com o comando apropriado até se obter um valor aproximado de cada uma das abcissas pretendidas.



A aproximação pode ser melhorada mediante a consulta da tabela de $A(x)$ na vizinhança dessas abcissas. Os valores pedidos, arredondados às décimas, são $0,2$ e $1,4$.

4. Seja $g(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática: $a, b, c \in (R)$ e $a \neq 0$.

   Identifica-se pelo enunciado que se pretende provar que existe uma e só uma abcissa $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g'(x_0) = 1$ (1 é o declive da bissectriz dos quadrantes ímpares).

   $g'(x) = 2ax + b$, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1-b}{2a}.$$

   Esta solução existe dado que $a \neq 0$ e é única para cada função g, donde

$$x_0 = \frac{1-b}{2a}.$$

   Assim, o ponto pedido existe e é único, qualquer que seja a função quadrática g.

5.1. Há 10 compartimentos dos quais apenas 7 vão ser ocupados, logo o valor pedido é dado por

$$A_7^{10} = 604800.$$

5.2. Pretende-se distribuir os 5 sabores de fruta por 5 compartimentos (5! maneiras) e colocar os sabores de baunilha e chocolate nos 5 compartimentos restantes (A_2^5 maneiras). O valor pedido é

$$5! \times A_2^5 = 2400.$$

6. Como a saída de *face par* no lançamento do dado implica tirar uma bola da caixa B, então o acontecimento Y dado X significa a extracção da bola verde da caixa B.

   Para este acontecimento, o número de casos possíveis é igual a 7 (nº total de bolas na caixa) e o número de casos favoráveis é 6 (nº de bolas verdes).

   Admitindo que todas as bolas têm igual probabilidade de sair então, pela regra de Laplace, a probabilidade pedida é igual a $6/7$.

FIM