EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2003

1.ª FASE
2.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

V.S.F.F.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

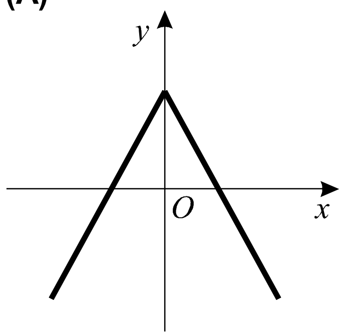
Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

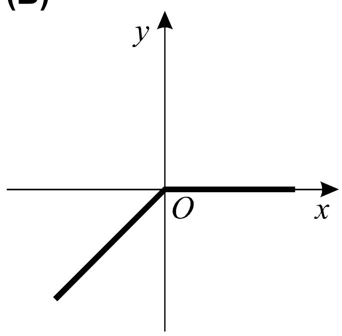
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico de uma função par, de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $]-\infty, 0]$?

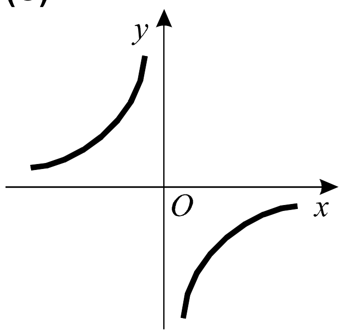
(A)



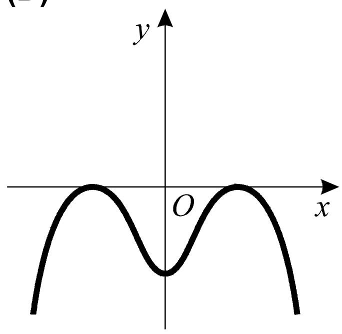
(B)



(C)



(D)

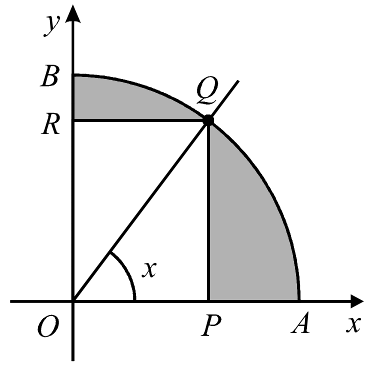


2. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco de circunferência AB, de centro na origem do referencial.

O ponto Q move-se ao longo desse arco.

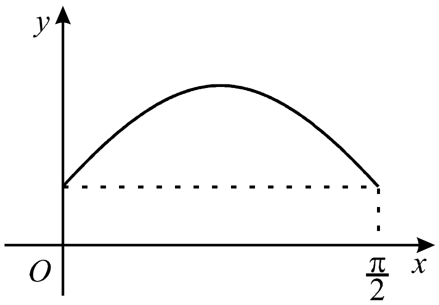
Os pontos P e R, situados sobre os eixos Ox e Oy, respectivamente, acompanham o movimento do ponto Q, de tal forma que o segmento de recta $[PQ]$ é sempre paralelo ao eixo Oy e o segmento de recta $[QR]$ é sempre paralelo ao eixo Ox.

Para cada posição do ponto Q, seja x a amplitude do ângulo AOQ e seja $h(x)$ a área da região sombreada.

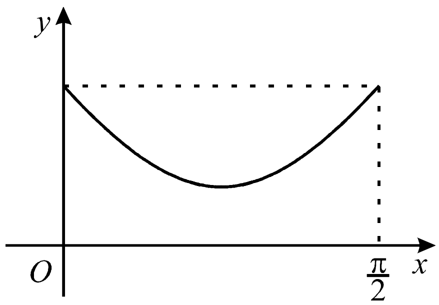


Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função h?

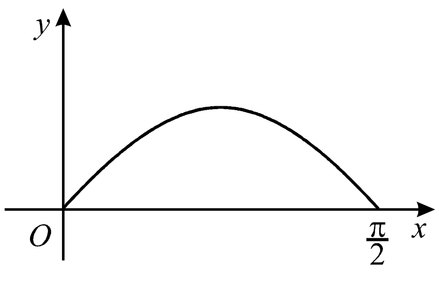
(A)



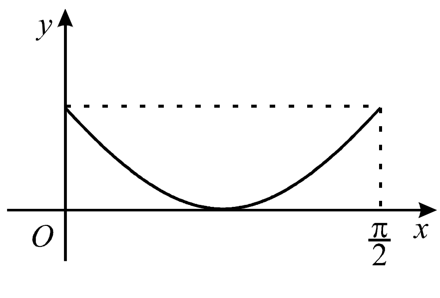
(B)



(C)



(D)

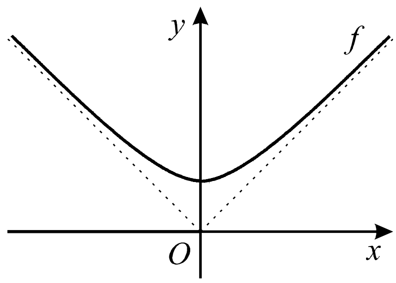


3. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log_2 x}{e^x - 1}$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

4. Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$, contínua em todo o seu domínio.

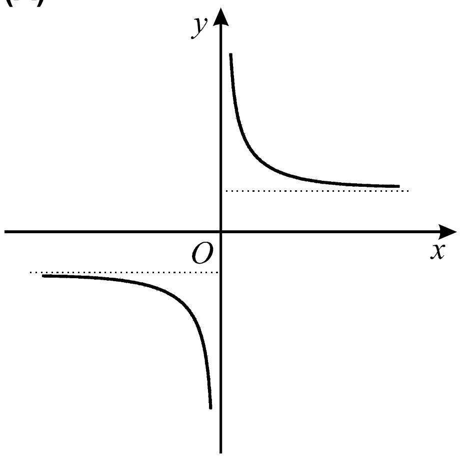
A bissectriz dos quadrantes pares e a bissectriz dos quadrantes ímpares são assimptotas do gráfico de f.



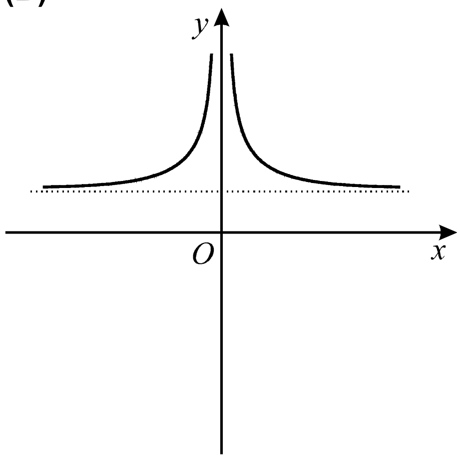
Indique em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g definida por

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

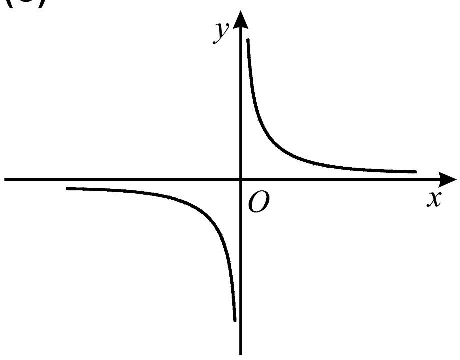
(A)



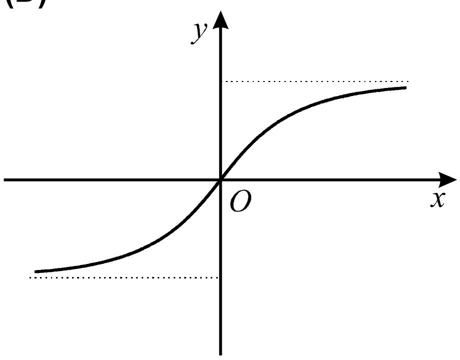
(B)



(C)



(D)



5. O quarto número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é $19\,600$.

A soma dos quatro primeiros números dessa linha é $20\,876$.

Qual é o terceiro número da **linha seguinte**?

(A) $1\,275$ **(B)** $1\,581$ **(C)** $2\,193$ **(D)** $2\,634$

6. Um saco contém bolas azuis, brancas e pretas.

Tira-se, ao acaso, uma bola do saco.

Sejam os acontecimentos:

A – a bola retirada é azul

B – a bola retirada é branca

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A e B são contrários

(B) A e $\overline{B}$ são contrários

(C) A e B são incompatíveis

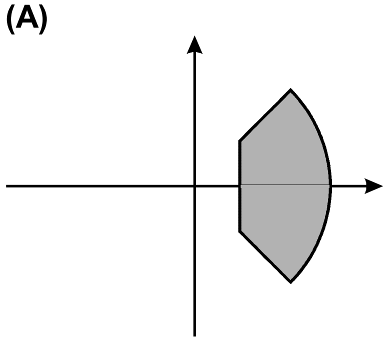
(D) A e $\overline{B}$ são incompatíveis

7. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição:

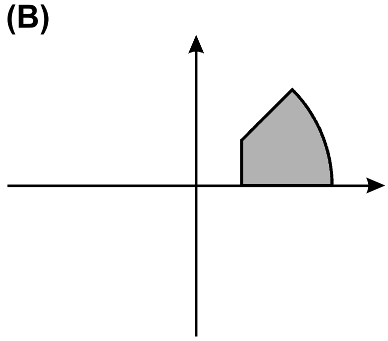
$$|z| \leq 3 \quad \wedge \quad 0 \leq arg\, z \leq \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad Re\, z \geq 1$$

Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

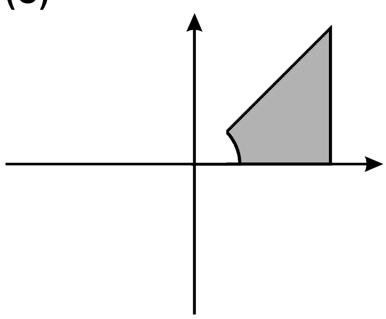
(A)



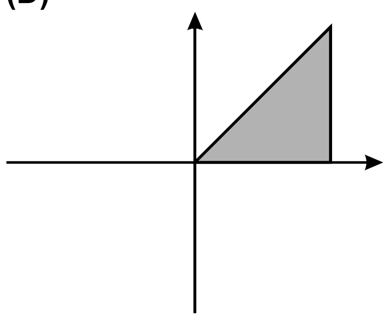
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine $\dfrac{(\sqrt{3}-2\,i)^2 + \left(2\ cis\ \frac{\pi}{9}\right)^3}{cis\ \frac{3\pi}{2}}$

apresentando o resultado na forma algébrica.

1.2. Seja α um número real.

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que:

- $z_1 = cis\ \alpha$
- $z_2 = cis\ (\alpha + \pi)$

Mostre que z_1 e z_2 não podem ser ambos raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

2. Considere a expressão $f(x) = a + b\operatorname{sen}^2 x$

Sempre que se atribui um valor real a a e um valor real a b, obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}$.

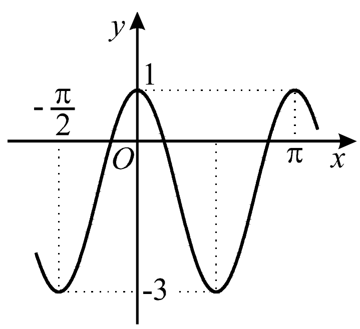
2.1. Nesta alínea, considere $a = 2$ e $b = -5$.

Sabe-se que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{2}$. **Sem recorrer à calculadora**, calcule $f(\theta)$

2.2. Para um certo valor de a e um certo valor de b, a função f tem o seu gráfico parcialmente representado na figura junta.

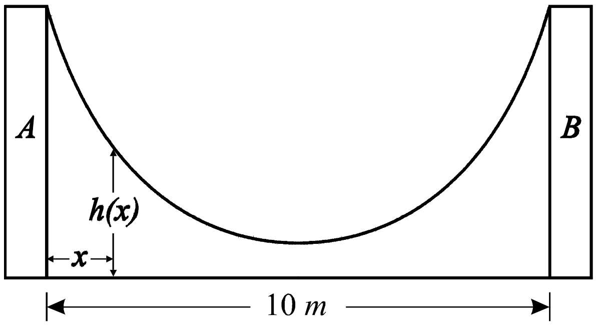
Conforme essa figura sugere, tem-se:

- o contradomínio de f é $[-3, 1]$
- 0 e π são maximizantes
- $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$ são minimizantes



Determine a e b.

3. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes, A e B, distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura.



Considere a função h definida por

$$h(x) = 15 - 4\ln(-x^2 + 10x + 11) \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Admita que $h(x)$ é a altura, em metros, do ponto da rampa situado x metros à direita da parede A.

3.1. Determine a altura da parede A. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.
Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2. **Sem recorrer à calculadora**, estude a função h quanto à monotonia e conclua daí que, tal como a figura sugere, é num ponto equidistante das duas paredes que a altura da rampa é mínima.

3.3. Mostre, analiticamente, que $h(5-x) = h(5+x)$.
Interprete esta igualdade no contexto da situação descrita.

4. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua derivada é dada por

$$f'(x) = (x+1)\,e^x - 10\,x$$

Seja A o único ponto de inflexão do gráfico de f.

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine a abcissa do ponto A, arredondada às décimas.

Explique como procedeu. Inclua, na sua explicação, o(s) gráfico(s) que obteve na calculadora.

5. O sangue humano está classificado em quatro grupos distintos: A, B, AB e O.

Independentemente do grupo, o sangue pode possuir, ou não, o factor Rhésus.

Se o sangue de uma pessoa possui este factor, diz-se Rhésus positivo (Rh^+); se não possui este factor, diz-se Rhésus negativo (Rh^-).

Na população portuguesa, os grupos sanguíneos e os respectivos Rhésus estão repartidos da seguinte forma:

	A	B	AB	O
Rh^+	$40\,\%$	$6{,}9\,\%$	$2{,}9\,\%$	$35{,}4\,\%$
Rh^-	$6{,}5\,\%$	$1{,}2\,\%$	$0{,}4\,\%$	$6{,}7\,\%$

5.1. Escolhido um português ao acaso, qual é a probabilidade de o seu grupo sanguíneo **não** ser o O? Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às unidades.

5.2. Escolhido um português ao acaso, e sabendo que é Rhésus negativo, qual é a probabilidade de o seu grupo sanguíneo ser o A? Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às unidades.

6. Considere o seguinte problema:

Vinte e cinco jovens (doze rapazes e treze raparigas) pretendem ir ao cinema. Chegados lá, verificam que existem apenas vinte bilhetes (para duas filas com dez lugares consecutivos em cada uma delas). Comprados os vinte bilhetes, distribuem-nos ao acaso. Como é evidente, cinco jovens irão ficar sem bilhete.
Qual é a probabilidade de uma das filas ficar ocupada só com rapazes e a outra só com raparigas?

Uma resposta correcta para este problema é: $\dfrac{{}^{12}C_{10} \times {}^{13}C_{10} \times 2 \times 10\,! \times 10\,!}{{}^{25}C_{20} \times 20\,!}$

Numa pequena composição, com cerca de vinte linhas, explique **esta resposta**.

Nota:

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do número de casos possíveis;
- explicação do número de casos favoráveis.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 11
- **1.2.** 10

2. 30
- **2.1.** 15
- **2.2.** 15

3. 38
- **3.1.** 6
- **3.2.** 16
- **3.3.** 16

4. 16

5. 16
- **5.1.** 6
- **5.2.** 10

6. 16

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: $Área\ da\ base \times Altura$

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho'\, cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\, cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$