EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2003

2.ª FASE
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

V.S.F.F.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. De uma função f, de domínio $[-4, 5]$ e **contínua** em todo o domínio, sabe-se que:

- $f(-4) = 6;$ $\quad f(2) = -1;$ $\quad f(5) = 1$
- f é estritamente decrescente no intervalo $[-4, 2]$
- f é estritamente crescente no intervalo $[2, 5]$

Quantas soluções tem a equação $f(x) = 0$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

2. Seja g uma função, de domínio A, definida por $g(x) = \ln(1 - x^2)$

Qual dos seguintes poderá ser o conjunto A?

(A) $]-e+1, e-1[$ **(B)** $]-1, 1[$

(C) $]0, +\infty[$ **(D)** $]-\infty, 1[$

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, e seja g a função definida por $g(x) = f(x+1)$

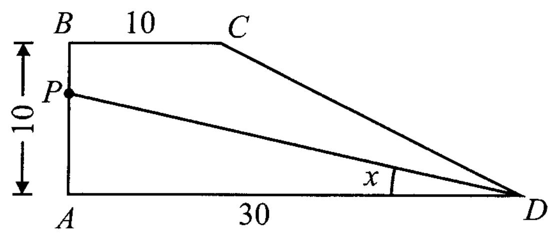
A recta de equação $y = 2x + 4$ é a única assimptota do gráfico de f.

Qual das seguintes é uma equação da única assimptota do gráfico de g ?

(A) $y = 2x + 6$ **(B)** $y = 2x + 4$

(C) $y = 2x - 4$ **(D)** $y = 2x - 6$

4. Na figura está representado um trapézio rectângulo $[ABCD]$, cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento.



Considere que um ponto P se desloca sobre o lado $[AB]$.
Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PDA.
Pretende-se determinar o valor de x para o qual o segmento $[PD]$ divide o trapézio em duas figuras com a mesma área.
Qual das equações seguintes traduz este problema?

(A) $\dfrac{30^2 \operatorname{sen} x}{2} = 100$ **(B)** $\dfrac{30^2 \operatorname{tg} x}{2} = 100$

(C) $\dfrac{30 \times 10 \operatorname{sen} x}{4} = 150$ **(D)** $\dfrac{30 \times 10 \operatorname{tg} x}{4} = 150$

5. Considere a linha do Triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 35.
Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.
Qual é a probabilidade de estes dois elementos serem iguais?

(A) $\dfrac{19}{{}^{35}C_2}$ **(B)** $\dfrac{35}{{}^{36}C_2}$ **(C)** $\dfrac{1}{{}^{35}C_2}$ **(D)** $\dfrac{18}{{}^{36}C_2}$

6. A Patrícia tem uma caixa com cinco bombons de igual aspecto exterior, mas só um é que tem licor. A Patrícia tira, ao acaso, um bombom da caixa, come-o e, se não for o que tem licor, experimenta outro. Vai procedendo desta forma até encontrar e comer o bombom com licor.

Seja X a variável aleatória «número de bombons **sem licor** que a Patrícia come».

Qual é a distribuição de probabilidades da variável X ?

(A)

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

(B)

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4

(C)

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

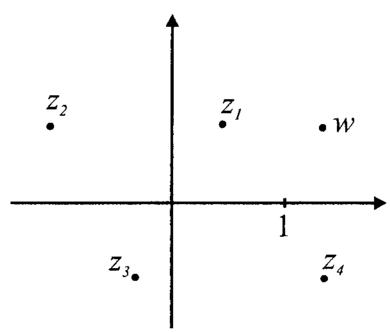
(D)

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4

7. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos:

w, z_1, z_2, z_3 e z_4

Qual é o número complexo que pode ser igual a $1 - w$?



(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. • $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos

• i designa a unidade imaginária

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, calcule, na forma trigonométrica, as raízes quartas do número complexo $1+\sqrt{3}\,i$, simplificando o mais possível as expressões obtidas.

1.2. Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no segundo quadrante e pertencente à recta definida pela condição $Re(z) = -2$.
Seja B a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de z.
Seja O a origem do referencial.
Represente, no plano complexo, um triângulo $[AOB]$, de acordo com as condições enunciadas.
Sabendo que a área do triângulo $[AOB]$ é 8, **determine** z, na forma algébrica.

2. Admita que, ao longo dos séculos XIX e XX e dos primeiros anos do século XXI, a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, é dada, aproximadamente, por

$$p(t) = 3{,}5 + \frac{6{,}8}{1+12{,}8\,e^{-0{,}036\,t}}$$

(considere que t é medido em anos e que o instante $t=0$ corresponde ao **início** do ano 1864).

2.1. De acordo com este modelo, qual será a população de Portugal Continental no **final** do presente ano (2003)?
Apresente o resultado em milhões de habitantes, arredondado às décimas.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.2. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:
De acordo com este modelo, em que ano a população de Portugal Continental foi de $3{,}7$ milhões de habitantes?
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Considere a função f, de **domínio** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por

$$f(x) = x + \operatorname{sen} x$$

Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

3.1. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $f'(0)$.

3.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

3.3. Determine os valores de x, pertencentes ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, tais que $f(x) = x + \cos x$

4. De um baralho de cartas, seleccionam-se seis cartas do naipe de Espadas: Ás, Rei, Dama, Valete, Dez e Nove.
Dispõem-se as seis cartas, em fila, em cima de uma mesa.

4.1. Quantas disposições diferentes podem ser feitas, de modo que as duas cartas do meio sejam o Ás e o Rei (não necessariamente por esta ordem)?

4.2. Quantas disposições diferentes podem ser feitas, de modo que o Rei não fique ao lado da Dama?

5. Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$).
Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = 0{,}1$
- $P(A \cup B) = 0{,}8$
- $P(A \mid B) = 0{,}25$

Prove que A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis.

(P designa probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A e $P(A \mid B)$ designa probabilidade de A, se B).

6. A Rita está a participar num concurso de lançamentos de papagaios de papel.

No regulamento do concurso, estão as condições de apuramento para a final, que se reproduzem a seguir.

> Após um certo instante, indicado pelo júri:
>
> - o papagaio não pode permanecer no ar mais do que um minuto;
> - o papagaio tem de permanecer, pelo menos durante doze segundos seguidos, a uma altura superior a dez metros;
> - o papagaio tem de ultrapassar os vinte metros de altura.

Admita que a distância, em metros, do papagaio da Rita ao solo, t **segundos** após o instante indicado pelo júri, é dada por

$$d(t) = 9{,}5 + 7\,\text{sen}\left(\frac{t^2}{200}\right) + 5\cos\left(\frac{t}{4}\right)$$

(os argumentos das funções seno e co-seno estão expressos em radianos).

Note-se que, a partir do instante em que o papagaio atinge o solo, a distância do papagaio ao solo deixa de ser dada por esta expressão, uma vez que passa a ser (naturalmente) igual a zero.

Deverá a Rita ser apurada para a final?

Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. **Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora**: **gráficos e coordenadas de alguns pontos** (coordenadas arredondadas às décimas).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I		**63**
	Cada resposta certa	+9
	Cada resposta errada	- 3
	Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II		**137**
1.		21
1.1.	11	
1.2.	10	
2.		26
2.1.	10	
2.2.	16	
3.		42
3.1.	14	
3.2.	14	
3.3.	14	
4.		20
4.1.	10	
4.2.	10	
5.		12
6.		16
TOTAL		**200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2 \qquad (r - \textit{raio})$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - \textit{raio})$

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad (r - \textit{raio})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta) \,.\, (\rho'\, cis\, \theta') = \rho\, \rho'\, cis\, (\theta + \theta')$

$\frac{\rho\, cis\, \theta}{\rho'\, cis\, \theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\, (\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\, (n\, \theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$