EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos | **Data Especial**
2004 | **Julho**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

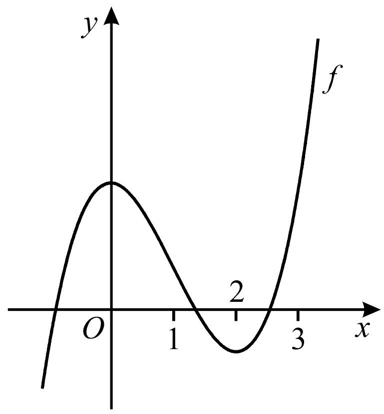
Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função f, polinomial do terceiro grau.

Seja f'' a **segunda** derivada de f.

Qual dos valores seguintes pode ser solução da equação $f''(x) = 0$?



(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

2. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

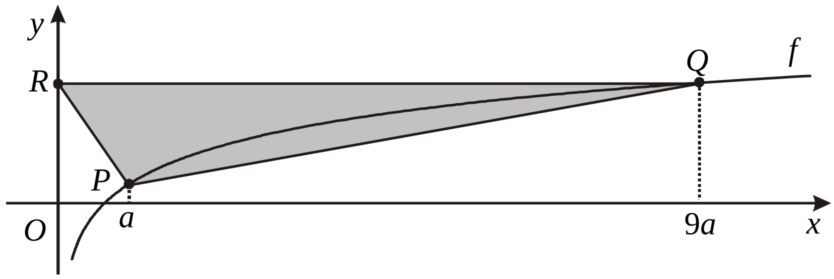
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x) + x}{x} = 4$
- o gráfico de g tem uma assimptota oblíqua.

Qual das condições seguintes pode ser uma equação dessa assimptota?

(A) $y = x + 3$ **(B)** $y = 3\,x$

(C) $y = x + 4$ **(D)** $y = 4\,x$

3. Na figura abaixo está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_3 x$.



Na figura está também representado um triângulo $[PQR]$.

Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f e as suas abcissas são a e $9a$, respectivamente (a designa um número real positivo).

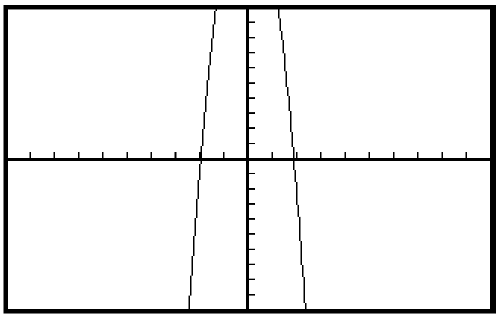
O ponto R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à de Q.

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[PQR]$?

(A) $9\,a^2$ **(B)** $9\,a$ **(C)** $\frac{9\,a^2}{2}$ **(D)** $\frac{9\,a+1}{2}$

4. De uma certa função h, **contínua** em $\mathbb{R}$, obteve-se com a calculadora, na janela de visualização *standard* $[-10, 10] \times [-10, 10]$, o gráfico apresentado na figura junta.

A função h é crescente em $[-3, 0]$ e é decrescente em $[0, 3]$.



Qual das afirmações seguintes **pode** ser verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$

(B) A função h é ímpar

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 10$

(D) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h'(x) > 0$

5. Considere todos os números de cinco algarismos **diferentes** que se podem formar com os cinco algarismos ímpares.
Quantos deles são maiores do que $60\,000$?

(A) 48 **(B)** 64 **(C)** 68 **(D)** 74

6. A Ana e o Bruno vão disputar entre si um torneio de Xadrez composto por dez partidas.
Cada partida pode terminar com a vitória de um deles ou pode terminar empatada.
Vence o torneio quem ganhar mais partidas.
No final de cada partida é registado o resultado, por meio de uma letra:
A - vitória da Ana;
B - vitória do Bruno;
E - empate.
Deste modo, ao fim das dez partidas, tem-se um registo como o que se exemplifica a seguir: $\boxed{\text{A E A B B E E A B E}}$

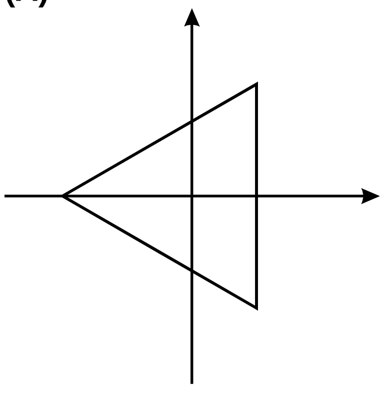
Quantos registos diferentes poderão acontecer, de tal forma que haja exactamente sete empates e a Ana seja a vencedora do torneio?

(A) 420 **(B)** 440 **(C)** 460 **(D)** 480

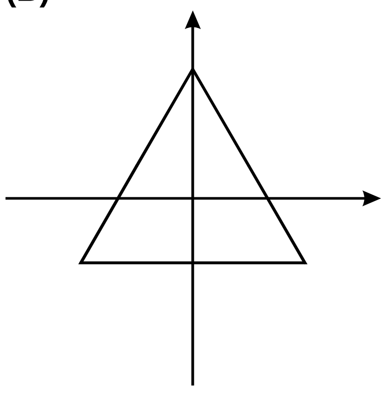
7. Um número complexo w tem a sua imagem geométrica na parte positiva do eixo imaginário.
As imagens geométricas das raízes cúbicas de w são os vértices de um dos triângulos abaixo representados.

Qual é esse triângulo?

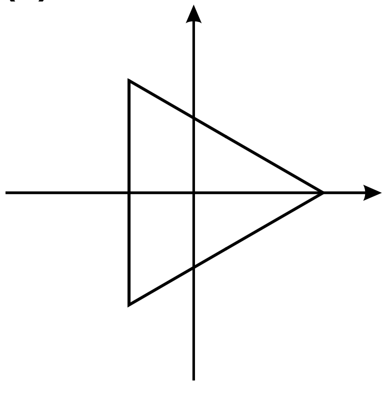
(A)



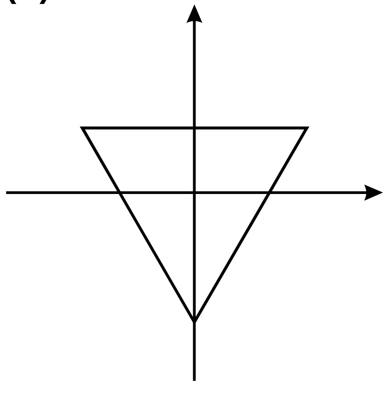
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

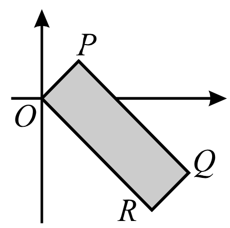
1. De dois números complexos, z_1 e z_2, sabe-se que um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{4}$ e que o módulo de z_2 é $3\sqrt{2}$.

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine $\dfrac{z_2 \times \overline{z_2}}{9} + \left(\dfrac{z_1}{|z_1|}\right)^8$

1.2. Na figura está representado, no plano complexo, um rectângulo $[OPQR]$.

Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial
- o ponto P é a imagem geométrica de z_1
- o ponto R é a imagem geométrica de z_2
- o rectângulo $[OPQR]$ tem área 6



Determine os números complexos z_1 e z_2. Apresente os resultados na forma algébrica.

2.

2.1. Seja Ω um espaço de resultados finito, associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis, mas não certos.

Prove que A e B são independentes se, e só se, $P(B|\,A) = P(B|\,\overline{A})$.

(P designa probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A e $P(B|A)$ designa a probabilidade de B, se A).

2.2. Numa caixa existem cinco bolas brancas e três bolas pretas. Ao acaso, tiram-se sucessivamente duas bolas da caixa, não repondo a primeira bola na caixa, antes de retirar a segunda.

2.2.1. Utilizando a propriedade enunciada na alínea anterior, mostre que os acontecimentos «*a primeira bola retirada é preta*» e «*a segunda bola retirada é branca*» **não** são independentes.

2.2.2. Seja X a variável aleatória «*número de bolas brancas que ficam na caixa, após a extracção das duas bolas*».
Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X.
Apresente as probabilidades na forma de fracção irredutível.

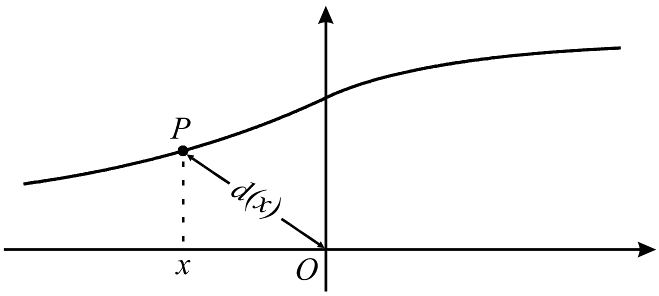
3. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & se \quad x < 0 \\ \frac{3\,x + 2}{2\,x + 2} & se \quad x \geq 0 \end{cases}$.

Sem recorrer à calculadora, resolva as alíneas seguintes:

3.1. Justifique a seguinte afirmação: «A função f é contínua em $\mathbb{R}$.»

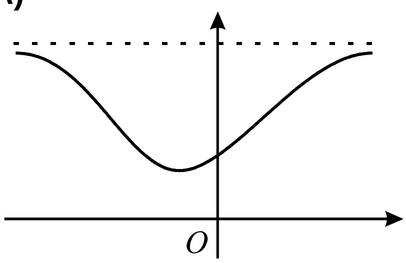
3.2. Estude a função f quanto à monotonia em $\mathbb{R}^+$.

3.3. Na figura está representada parte do gráfico da função f.

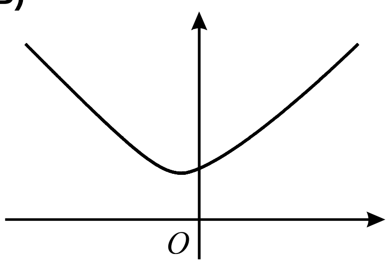


Considere que um ponto P se desloca ao longo do gráfico de f.
Seja d a função que, à abcissa do ponto P, faz corresponder a distância de P à origem do referencial.
Em qual das figuras seguintes pode estar parte do gráfico da função d? Numa pequena composição, explique porque não pode ser nenhum dos outros três, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.

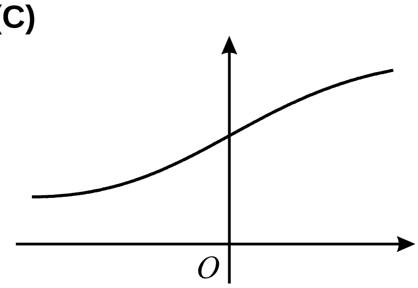
(A)



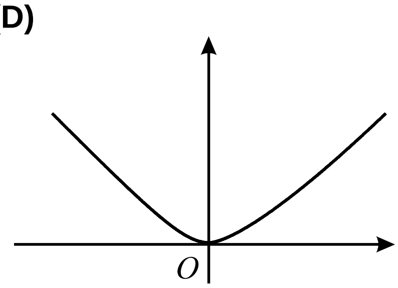
(B)



(C)



(D)



Notas: na opção A, a recta representada a tracejado é assimptota horizontal do gráfico; na opção C, a função é estritamente monótona, em $\mathbb{R}$.

4. No Solstício de Junho (dia em que começa o Verão), em qualquer local da Terra situado entre o Equador e o Círculo Polar Árctico, o tempo $\boldsymbol{t}$, medido em horas, que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, está relacionado com a latitude $\boldsymbol{\lambda}$, desse local, por meio da fórmula

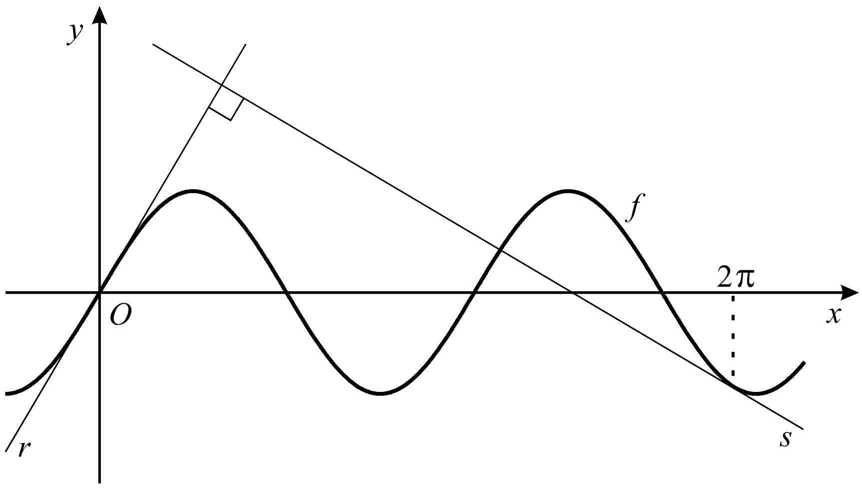
$$\cos\,(\,7{,}5\ t\,)\ =\ -\ \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\phi} \qquad (\phi \text{ é a latitude do Círculo Polar Árctico})$$

Os argumentos das funções **co-seno** e **tangente** estão expressos em **graus**.

4.1. Sabendo que $\phi \approx 66{,}5°$ e que a latitude de Beja é de $38°$, determine o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, em Beja, no Solstício de Junho. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

4.2. Esta fórmula nunca poderia ser aplicável a locais situados entre o Círculo Polar Árctico e o Pólo Norte. Justifique.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(a\,x)$, onde a designa uma constante real (o argumento da função **seno** está expresso em **radianos**).
Na figura abaixo está parte da representação gráfica da função f.



Na figura estão também representadas:
- uma recta r tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0;
- uma recta s tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2π.

Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Sabendo que as rectas r e s são perpendiculares e que $a \in \left]\frac{3}{2}\,,\,2\right[$, qual é o valor de a?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum (ou alguns) ponto(s). Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às décimas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21

1.1. 11
1.2. 10

2. 32

2.1. 10
2.2. 22
2.2.1. 10
2.2.2. 12

3. 42

3.1. 14
3.2. 14
3.3. 14

4. 28

4.1. 14
4.2. 14

5. 14

TOTAL **200**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\, maior \times Diagonal\, menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\, maior + Base\, menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\, a \,.\, \cos b + \text{sen}\, b \,.\, \cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \,.\, \text{tg}\, b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\, u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \text{sen}\, u$

$(\text{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\,(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\, x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$