1.

a) Tem-se que: $z_2 \times \overline{z_2} = |z_2|^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 9 \times 2 = 18$

Portanto, $\dfrac{z_2 \times \overline{z_2}}{9} = \dfrac{18}{9} = 2$

Por outro lado, tem-se que $z_1 = \rho \; cis \; \dfrac{\pi}{4}$

Portanto, $\dfrac{z_1}{|z_1|} = \dfrac{\rho \; cis \; \frac{\pi}{4}}{\rho} = cis \; \dfrac{\pi}{4}$

Donde, $\left(\dfrac{z_1}{|z_1|}\right)^8 = \left(cis \; \dfrac{\pi}{4}\right)^8 = cis\,(2\pi) = 1$

Portanto, $\dfrac{z_2 \times \overline{z_2}}{9} + \left(\dfrac{z_1}{|z_1|}\right)^8 = 2 + 1 = 3$

b) A área do rectângulo $[OPQR]$ é igual a $\overline{OP} \times \overline{OR} = |z_1| \times |z_2|$

Portanto, $|z_1| \times |z_2| = 6$, donde $|z_1| \times 3\sqrt{2} = 6$, pelo que

$|z_1| = \dfrac{6}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Portanto, $z_1 = \sqrt{2} \; cis \; \dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i\right) = 1 + i$

Como o ângulo POR é recto, tem-se

$z_2 = 3\sqrt{2} \; cis\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i\right) = 3 - 3i$

2.

a) Tem-se que: $P(B|\,A) = P(B|\,\overline{A}) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B)\,.\,P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B)\,.\,P(A) \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B)\,.\,[1 - P(A)] = P(\overline{A} \cap B)\,.\,P(A) \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) - P(A)\,.\,P(A \cap B) = P(\overline{A} \cap B)\,.\,P(A) \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)\,.\,P(A) \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)\,.\left[P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)\right] \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)\ \Leftrightarrow\ A$ e B independentes

b1) No que se segue, A designa o acontecimento «*a primeira bola retirada é preta*» e B designa o acontecimento «*a segunda bola retirada é branca*».

Tem-se que $P(B|\,A) = \frac{5}{7}$ pois: se a primeira bola retirada é preta, ficam, na caixa, cinco bolas brancas e duas bolas pretas, num total de sete bolas; a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca é, portanto, $\frac{5}{7}$

Tem-se que $P(B|\,\overline{A}) = \frac{4}{7}$ pois: se a primeira bola retirada é branca, ficam, na caixa, quatro bolas brancas e três bolas pretas, num total de sete bolas; a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca é, portanto, $\frac{4}{7}$

Como $P(B|\,\overline{A}) \neq P(B|\,A)$, tem-se, tendo em conta a propriedade da alínea anterior, que os acontecimentos A e B não são independentes.

b2) A caixa contém, inicialmente, cinco bolas brancas e três bolas pretas. Depois de se retirarem duas bolas, podem ficar, na caixa, três, quatro ou cinco bolas brancas.

A variável X pode, portanto, assumir os valores 3, 4 e 5.
Tem-se que:

$P(X=3)$ é a probabilidade de as duas bolas extraídas serem brancas, ou seja,
$$\frac{{}^5C_2 \times {}^3C_0}{{}^8C_2} = \frac{5}{14}$$

$P(X=4)$ é a probabilidade de uma das bolas extraídas ser branca e a outra ser preta, ou seja, $\frac{{}^5C_1 \times {}^3C_1}{{}^8C_2} = \frac{15}{28}$

$P(X=5)$ é a probabilidade de as duas bolas extraídas serem pretas, ou seja,
$$\frac{{}^5C_0 \times {}^3C_2}{{}^8C_2} = \frac{3}{28}$$

Tem-se, portanto, a seguinte tabela de distribuição de probabilidades da variável X

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

3.

a) A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$ pois é o quociente de duas funções afins, portanto contínuas.

A função f é contínua em $\mathbb{R}^-$ pois é o quociente de duas funçõs contínuas (uma que é a diferença entre uma função exponencial e uma função constante, e outra que é uma função afim).

Falta estudar a função quanto à continuidade no ponto 0.
Tem-se que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 , \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad f(0) = 1$$

Portanto, f é contínua no ponto 0.

A função f é, assim, contínua em $\mathbb{R}$.

b) Tem-se que $\left(\frac{3\,x+2}{2\,x+2}\right)' = \dfrac{3\,(2x+2) - 2\,(3x+2)}{(2\,x+2)^2} = \dfrac{2}{(2\,x+2)^2}$

Dado que $\dfrac{2}{(2\,x+2)^2} > 0 \;,\; \forall\, x \in \mathbb{R}^+$, podemos concluir que f é crescente em $\mathbb{R}^+$.

c) Tem-se que $\lim\limits_{x \to -\infty} d(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = +\infty$, pelo que o gráfico da função d não tem assimptota horizontal. A opção A não é, portanto, a opção correcta.
A opção C também não é a opção correcta, dado que a função d não é sempre crescente, ao contrário do que este gráfico sugere.
Como a função d nunca se anula, a opção D não é, igualmente, a opção correcta.
Portanto, a opção correcta é a B.

4.

a) Tem-se que $\cos\,(\,7{,}5\;t\,) = -\dfrac{\text{tg}\,38°}{\text{tg}\,66{,}5°}$

Portanto, $\cos\,(\,7{,}5\;t\,) \approx -0{,}3397$ pelo que $7{,}5\;t \approx 109{,}8594$

Vem, então, $t \approx 14{,}6479$

Portanto, $t \approx 14\,h\;\;39\,m$

b) A latitude de locais situados entre o Círculo Polar Árctico e o Pólo Norte é superior à latitude do Círculo Polar Árctico.

Portanto, para locais situados entre o Círculo Polar Árctico e o Pólo Norte, tem-se que $\lambda > \phi$.

Pelo facto da função tangente ser crescente em $[0°, 90°[$, tem-se $\text{tg}\,\lambda > \text{tg}\,\phi$.

Por isso, $\dfrac{\text{tg}\,\lambda}{\text{tg}\,\phi} > 1$, donde $-\dfrac{\text{tg}\,\lambda}{\text{tg}\,\phi} < -1$, pelo que é impossível a equação
$\cos\,(\,7{,}5\;t\,) = -\dfrac{\text{tg}\,\lambda}{\text{tg}\,\phi}$

5. Tem-se que $f'(x) = a \cos(ax)$

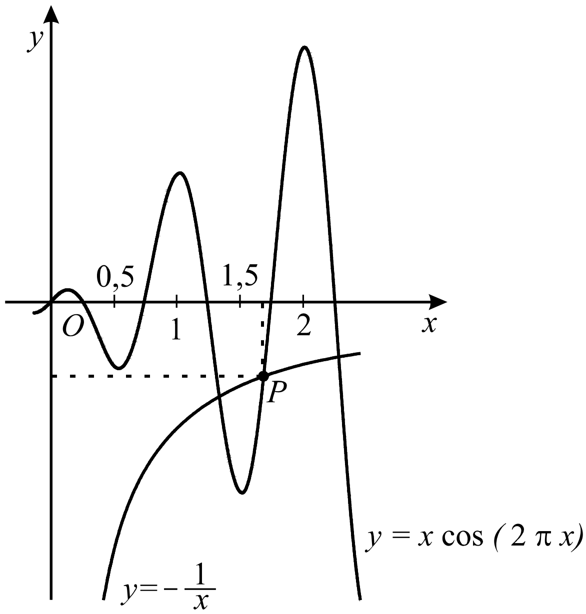
Portanto,

o declive da recta r é $f'(0) = a$

e o declive da recta s é $f'(2\pi) = a \cos(2\pi a)$

As rectas r e s são, portanto, perpendiculares se, e só se, $a \cos(2\pi a) = -\dfrac{1}{a}$

Utilizemos as capacidades gráficas da calculadora para determinar um valor aproximado da solução desta equação, no intervalo $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.



Na figura estão representados:

• parte do gráfico da funções definida por $y = x \cos(2\pi x)$

• parte do gráfico da funções definida por $y = -\dfrac{1}{x}$

• o ponto P de abcissa pertencente a $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ e que é ponto de intersecção dos dois gráficos.

A abcissa do ponto P é, aproximdamente, $1{,}7$.

Portanto, $a \approx 1{,}7$.