EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos | **1.ª FASE**
2004 | **VERSÃO 1**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\qquad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' \,.\, v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \,.\, v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \,.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \,.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \,.\, e^u$

$(a^u)' = u' \,.\, a^u \,.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Para um certo valor de k, é **contínua** em $\mathbb{R}$ a função g, definida por

$$g(x) = \begin{cases} k + \cos x & se \quad x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

($\ln$ designa logaritmo de base e)

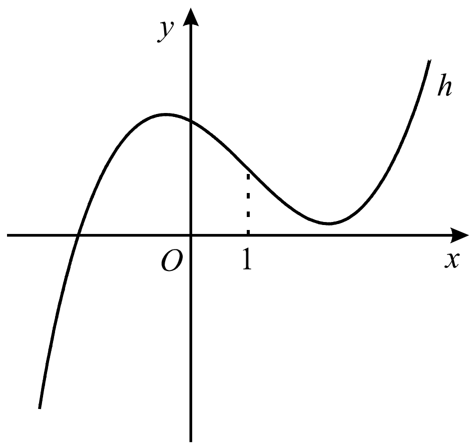
Qual é o valor de k ?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

2. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função polinomial h.

O ponto de abcissa 1 é o único ponto de inflexão do gráfico de h.

Qual das expressões seguintes pode definir h'', **segunda derivada** da função h ?



(A) $(x-1)^2$ **(B)** $(1+x)^2$

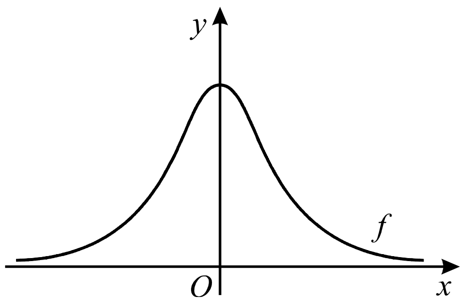
(C) $x-1$ **(D)** $1-x$

3. Sabe-se que $\log_2 a = \frac{1}{5}$

Qual é o valor de $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)$?

(A) -1 **(B)** -2 **(C)** -3 **(D)** -4

4. Na figura abaixo está parte da representação gráfica de uma função f, par e positiva, da qual a recta de equação $y = 0$ é assimptota.



Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)}$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

5. Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) A soma das probabilidades de dois acontecimentos incompatíveis é 1

(B) O produto das probabilidades de dois acontecimentos incompatíveis é 1

(C) A soma das probabilidades de dois acontecimentos contrários é 1

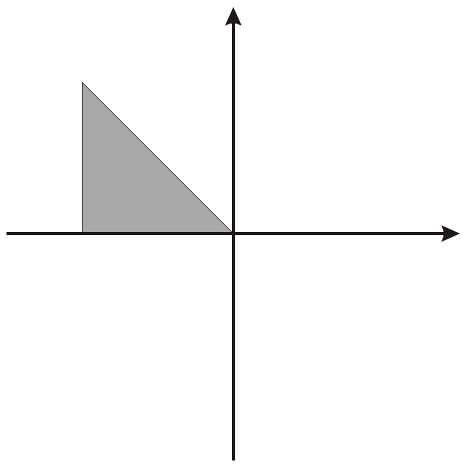
(D) O produto das probabilidades de dois acontecimentos contrários é 1

6. Uma pessoa vai visitar cinco locais, situados no Parque das Nações, em Lisboa: o Pavilhão de Portugal, o Oceanário, o Pavilhão Atlântico, a Torre Vasco da Gama e o Pavilhão do Conhecimento.

De quantas maneiras diferentes pode planear a sequência das cinco visitas, se quiser começar na Torre Vasco da Gama e acabar no Oceanário?

(A) 6 **(B)** 12 **(C)** 24 **(D)** 120

7. Na figura está representado, no plano complexo, um triângulo rectângulo isósceles.



Os catetos têm comprimento 1, estando um deles contido no eixo dos números reais.
Um dos vértices do triângulo coincide com a origem do referencial.

Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $Re(z) \geq 0 \quad \wedge \quad Im(z) \leq 0 \quad \wedge \quad |z| \leq 1$

(B) $Re(z) \leq 0 \quad \wedge \quad Im(z) \geq 0 \quad \wedge \quad |z| \leq 1$

(C) $Re(z) \geq -1 \quad \wedge \quad Im(z) \geq 0 \quad \wedge \quad |z-i| \geq |z+1|$

(D) $Re(z) \geq -1 \quad \wedge \quad Im(z) \geq 0 \quad \wedge \quad |z-i| \leq |z-1|$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, considere os números complexos: $z_1 = -6 + 3i$ e $z_2 = 1 - 2i$

Sem recorrer à calculadora, determine $\dfrac{z_1 + i^{23}}{z_2}$, apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

2. Seja z um número complexo, cuja imagem geométrica pertence ao primeiro quadrante (eixos não incluídos).
Justifique que a imagem geométrica de z^3 não pode pertencer ao quarto quadrante.

3. O João tem, no bolso, **seis** moedas: duas moedas de 1 euro e quatro moedas de 50 cêntimos.
O João retira, simultaneamente e ao acaso, **duas** moedas do bolso.

3.1. Seja X a quantia, em euros, correspondente às moedas retiradas pelo João. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X, apresentando as probabilidades na forma de fracção irredutível.

3.2. Depois de ter retirado as duas moedas do bolso, o João informou a sua irmã Inês de que elas eram iguais. Ela apostou, então, que a quantia retirada era de 2 euros. Qual é a probabilidade de a Inês ganhar a aposta? Apresente o resultado sob a forma de fracção irredutível.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 + 3\,x^2\,e^{-x}$

4.1. **Sem recorrer à calculadora**, mostre que a função f tem um único mínimo relativo e determine-o.

4.2. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), mostre que, no intervalo $]-1, 0[$, existe pelo menos um objecto cuja imagem, por meio de f, é 4.

5. A figura 1 representa um depósito de forma cilíndrica, que contém um certo volume de um combustível.

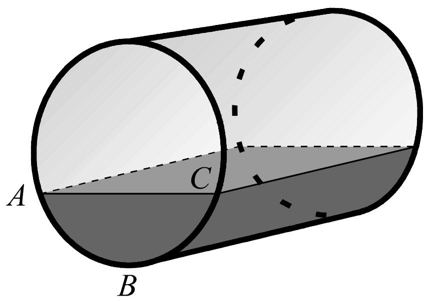


Figura 1

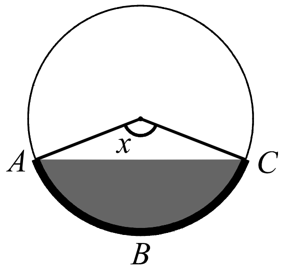


Figura 2

Admita que a função V, de domínio $[0, 2\pi]$, definida por

$$V(x) = 80\,(x - \operatorname{sen} x)\,,$$

dá o volume, em metros cúbicos, de combustível existente no depósito, em função da amplitude x, em **radianos**, do arco ABC (que, como se sabe, é igual à amplitude do ângulo ao centro correspondente, assinalado na figura 2).

5.1. Qual é a capacidade total do depósito, em metros cúbicos?

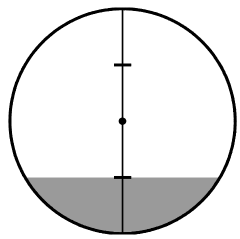
Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

5.2. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: *Qual terá de ser a amplitude, em radianos, do arco* ABC, *para que existam* $300\ m^3$ *de combustível no depósito*?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

5.3. Determine, em metros cúbicos, o volume do combustível existente no depósito, no momento em que a sua altura é $\frac{1}{4}$ da altura máxima.

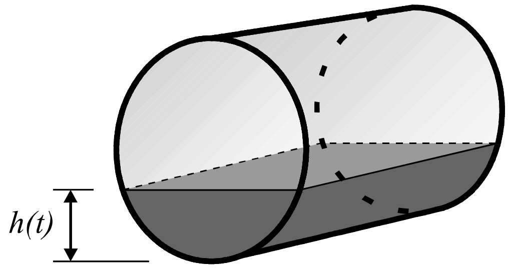


Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

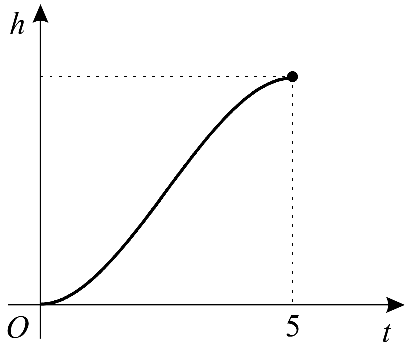
5.4. Admita agora que o depósito está vazio e que, num certo instante, se começa a introduzir combustível a uma taxa constante, até ficar cheio, o que acontece ao fim de cinco horas.

Seja $h(t)$ **a altura** do combustível no depósito, t **horas** após o instante em que começa a ser introduzido.
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função h ?

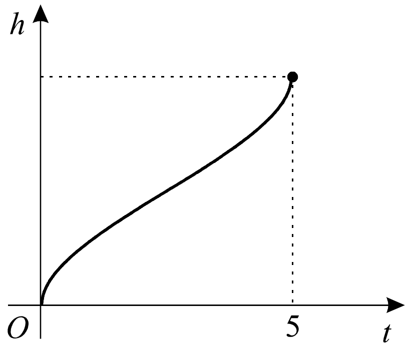


Numa pequena **composição**, com cerca de dez linhas, **indique as razões que o levam a rejeitar os restantes gráficos** (indique **três** razões, uma por cada gráfico rejeitado).

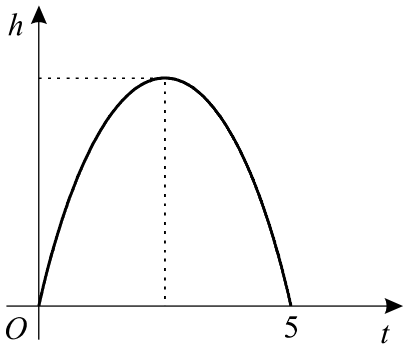
(A)



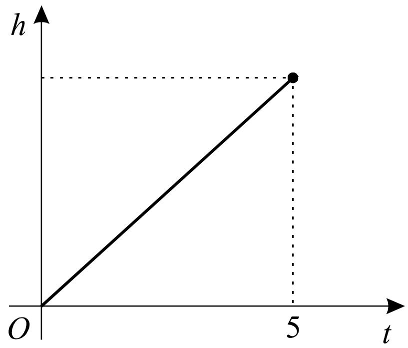
(B)



(C)



(D)



FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 10

2. 11

3. 32
- **3.1.** 16
- **3.2.** 16

4. 28
- **4.1.** 14
- **4.2.** 14

5. 56
- **5.1.** 14
- **5.2.** 14
- **5.3.** 14
- **5.4.** 14

TOTAL **200**