

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
 2004

1.ª FASE

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I 63

Cada resposta certa +9
 Cada resposta errada..... - 3
 Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II 137

1. 10

2. 11

3. 32

 3.1. 16

 3.2. 16

4. 28

 4.1. 14

 4.2. 14

5. 56

 5.1. 14

 5.2. 14

 5.3. 14

 5.4. 14

TOTAL 200

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	B	C	B	C	C	A	C
Versão 2	A	B	D	C	A	D	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

CrITÉrios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.
2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.
3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.
 - 4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
 - 4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
 - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
 - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.
 - 4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
 - 4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
 - 4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.
5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.
6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.
7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.
8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

Para cada item são apresentados:

- a cotação total do item;
- para cada processo de resolução apresentado, uma subdivisão da cotação total em cotações parcelares;
- exemplos de possíveis respostas dos examinandos, com a respectiva cotação a atribuir, devidamente explicada.

1.10

Substituição, na expressão $\frac{z_1 + i^{23}}{z_2}$, de z_1 por $-6 + 3i$
e de z_2 por $1 - 2i$ 1

$i^{23} = -i$ 1

Divisão5

Multiplicação de ambos os termos da fracção pelo
conjugado do denominador 1

Cálculo do novo numerador 2

Cálculo do novo denominador2

Resultado na forma trigonométrica 3

Módulo (**ver nota 1**) 1

Argumento (**ver nota 2**)2

Notas:

1. Não se exige a apresentação de cálculos intermédios (o examinando pode calcular o módulo mentalmente).
2. Não se exige a apresentação de cálculos intermédios (o examinando pode visualizar o argumento graficamente, dado que a imagem geométrica do complexo pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, no terceiro quadrante).

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\begin{aligned}\frac{-6 + 3i + i^{23}}{1 - 2i} &= \frac{(-6 + 2i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \\ &= \frac{-6 - 12i + 2i - 4}{1 + 4} = \\ &= \frac{-10 - 10i}{5} = -2 - 2i\end{aligned}$$

$$\rho = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-2}{-2} = 1 = \frac{\pi}{4} \quad \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\sqrt{8} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$$

Cotação a atribuir: $1 + 1^{(*)} + 5(1 + 2 + 2) + 3(1 + 2) + (-1)^{(**)} = 9$

(*) Etapa implícita - ver critério geral 4.5.

(**) Erro de escrita $\left(1 = \frac{\pi}{4}\right)$ - ver critério geral 6.

Exemplo 2

$$\begin{aligned}\frac{1 - 2i + i^{23}}{-6 + 3i} &= \frac{1 - 2i - i}{-6 + 3i} = \frac{1 - 3i}{-6 + 3i} = \\ &= -\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \operatorname{cis} \pi\end{aligned}$$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 1 + 0(0 + 0 + 0) + 2(1 + 1^{(**)}) = 3$

(*) O examinando troca z_1 com z_2

(**) No último passo deve ser atribuído 1 ponto, pois a determinação do argumento fica mais simples - ver critério geral 4.4.

2. 11

Referir que z tem um argumento θ tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	2 (1+1)
Referir que z^3 tem argumento 3θ	2
Referir que $0 < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$	5 (1+4)
Conclusão	2

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

Seja $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ $z^3 = \rho^3 \operatorname{cis} 3\theta$ $\theta \in]0, \frac{\pi}{2} [$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $0 < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$

Logo, se $3\theta \in]0, \frac{3\pi}{2} [$, z^3 não pode pertencer ao quarto quadrante.

Cotação a atribuir: $2 + 2 + 5 + 2 = 11$

Exemplo 2

$z = \rho \operatorname{cis} \theta$ $z^3 = \rho^3 \operatorname{cis} 3\theta$

Logo o argumento de z^3 é triplo do argumento de z . Se z pertence ao 1.º quadrante, z^3 nunca pode pertencer ao quarto quadrante, uma vez que o maior ângulo possível de z ($\approx \frac{\pi}{2}$), o seu triplo nunca chegaria ao 4.º quadrante, ficando pelo terceiro quadrante.

Cotação a atribuir: $1 + 2 + 4 + 1 + (-1)^{(*)} = 7$

(*) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando escreve uma afirmação inequivocamente incorrecta, do ponto de vista formal: *maior ângulo possível de z* (não existe tal ângulo) - ver critério geral 6.

Exemplo 3

$$z = \rho \operatorname{cis} \theta$$

$$z^3 = \rho^3 \operatorname{cis} 3\theta$$

Não sei qual é o θ , mas sei que pertence ao 1.º quadrante.

Apesar de os eixos não estarem incluídos, θ pode ser um número muito próximo de zero (no mínimo) ou muito próximo de $\frac{\pi}{2}$ (no máximo).

Assim, se θ for zero: $z^3 = \rho^3 \operatorname{cis} 3 \times 0 = \rho^3 \operatorname{cis} 0 \Rightarrow \in 1^\circ Q$.

Se θ for $\frac{\pi}{2}$: $z^3 = \rho^3 \operatorname{cis} 3 \times \frac{\pi}{2} = \rho^3 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$

Se θ fosse $\frac{\pi}{2}$, 3θ poderia ser $\frac{3\pi}{2}$.

Assim, como não é, só poderá aproximar-se por valores inferiores a $\frac{3\pi}{2}$.

Logo, tenho a certeza que z^3 nunca terá a sua imagem geométrica no quarto quadrante.

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 2 + 4^{(**)} + 2 + (-1)^{(***)} = 9$

(*) Apesar de, formalmente, o examinando não escrever a dupla desigualdade $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, ela está expressa na frase « θ pode ser um número muito próximo de zero (no mínimo) ou muito próximo de $\frac{\pi}{2}$ (no máximo)».

(**) O examinando não conclui a dupla desigualdade $0 < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$. Apesar disso, podemos considerar que ela está quase implícita no resto da resolução (dá os 4 pontos).

(***) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando escreve uma expressão inequivocamente incorrecta, do ponto de vista formal ($\Rightarrow \in 1^\circ Q$) - ver critério geral 6.

3.1. 16

Indicar os valores que a variável X pode tomar 4

Determinar o número de casos possíveis (denominador comum de todas as probabilidades) **(ver nota 1)** 3

Escrever correctamente $P(X = 1)$ **(ver notas 1 e 2)**..... 3

Escrever correctamente $P(X = 1,5)$ **(ver notas 1 e 2)**..... 3

Escrever correctamente $P(X = 2)$ **(ver notas 1 e 2)** 3

Notas:

1. Se o examinando considerar que o número de casos possíveis é 36 (tiragem com reposição) e calcular em conformidade as três probabilidades (4/9, 4/9 e 1/9), deverão ser atribuídos 3 dos 12 pontos referentes às quatro últimas etapas.
2. Se o examinando não apresentar todas as probabilidades na forma de fracção irredutível, deve ser penalizado em 1 ponto, no total da cotação a atribuir à sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

x_i	1	1,5	2
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$P(X = 1) = \frac{{}^4C_2}{{}^6C_2}$$

$$P(X = 1,5) = \frac{{}^4C_1 \times {}^2C_1}{{}^6C_2}$$

$$P(X = 2) = \frac{{}^2C_2}{{}^6C_2}$$

Cotação a atribuir: $4 + 3 + 3 + 3 + 3 + (-1)^{*} = 15$

(*) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando não apresenta todas as probabilidades na forma de fracção irredutível (ver nota 2).

Exemplo 2

x_i	1	1,5	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$P(1\text{€}) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$P(1,5\text{€}) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$P(2\text{€}) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Cotação a atribuir: $4 + 3 + 3 + 3 + 3 + (-1)^{(*)} = 15$

(*) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando escreve expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal: $P(1\text{€})$, $P(1,5\text{€})$ e $P(2\text{€})$ - ver critério geral 6.

Exemplo 3

x_i	$0,5 + 0,5 = 1$	$0,5 + 1 = 1,5$	$1 + 0,5 = 1,5$	$1 + 1 = 2$
$P(X = x_i)$	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$

Casos possíveis: $6 \times 6 = 36$

$$0,5 + 0,5 \rightarrow 4 \times 4 = 16 \quad p = \frac{16}{36}$$

$$0,5 + 1 \rightarrow 4 \times 2 = 8 \quad p = \frac{8}{36}$$

$$1 + 0,5 \rightarrow 2 \times 4 = 8 \quad p = \frac{8}{36}$$

$$1 + 1 \rightarrow 2 \times 2 = 4 \quad p = \frac{4}{36}$$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 3^{(**)} + (-1)^{(***)} = 5$

(*) A forma como o examinando apresenta os valores possíveis da variável não está completamente correcta, na medida em que as situações $0,5 + 1 = 1,5$ e $1 + 0,5 = 1,5$ são apresentadas (erradamente) como distintas.

(**) Ver nota 1.

(***) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando não apresenta as probabilidades na forma de fracção irredutível (ver nota 2).

Exemplo 4

	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
0,5		1	1	1	1,5	1,5
0,5	1		1	1	1,5	1,5
0,5	1	1		1	1,5	1,5
0,5	1	1	1		1,5	1,5
1	1,5	1,5	1,5	1,5		2
1	1,5	1,5	1,5	1,5	2	

$$P(X = 1) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$P(X = 1,5) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$P(X = 2) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

x_i	1	1,5	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Cotação a atribuir: $4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 16$

Exemplo 5

	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
1	1,5	1,5	1,5	1,5	2	2
1	1,5	1,5	1,5	1,5	2	2

$$P(X = 1) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$P(X = 1,5) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$P(X = 2) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

x_i	1	1,5	2
$P(X = x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

Cotação a atribuir: $4 + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 4$

(*) Os valores apresentados pelo examinando não estão coerentes com a tabela apresentada.

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Probabilidade pedida: $\frac{{}^2C_2}{{}^4C_2 + {}^2C_2}$ ou $\frac{2 \times 1}{4 \times 3 + 2 \times 1}$

Resultado final = $\frac{1}{7}$

As cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção (ver notas 1, 2, 3, 4 e 5) 15

Resultado na forma de fracção irredutível (ver nota 6)..... 1

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{{}^2C_2}{{}^4C_2 + {}^2C_2}$ ou $\frac{1}{{}^4C_2 + 1}$ ou $\frac{2 \times 1}{4 \times 3 + 2 \times 1}$ 15

$\frac{2 \times 2}{4 \times 4 + 2 \times 2}$ 8

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se a fracção escrita pelo examinando não for uma das indicadas acima, nem equivalente, deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

5. Exige-se que o examinando explicita a forma como efectuou a contagem dos casos possíveis (escrevendo uma expressão como as dos exemplos fornecidos atrás ou apresentando um esquema), a não ser que o examinando utilize dados obtidos na resolução da alínea anterior e o valor apresentado esteja de acordo com esses dados.

6. O ponto relativo a esta etapa só pode ser atribuído se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

2.º Processo

Sejam os acontecimentos A e B
 A - a quantia retirada é de 2 €
 B - as moedas retiradas são iguais

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{1}{7}$$

As cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Identificação da probabilidade pedida com $P(A|B)$,
 explicitando os acontecimentos A e B 3

$P(A \cap B) = \frac{1}{15}$ (ver nota)5

$P(B) = \frac{7}{15}$ (ver nota) 5

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ 2

$P(A|B) = \frac{1}{7}$ 1

Nota:

Exige-se que o examinando explicita a forma como obteve as duas probabilidades, a não ser que utilize a distribuição de probabilidades apresentada na alínea anterior.

3.º Processo

	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
0,5		1	1	1		
0,5	1		1	1		
0,5	1	1		1		
0,5	1	1	1			
1						2
1					2	

Probabilidade pedida = $\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

As cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Apresentação da tabela e escrita da fracção..... 15

Resultado sob a forma de fracção irredutível 1

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$p = \frac{1}{7}$$

$$1\text{€} + 1\text{€}$$

$$0,5\text{€}(1) + 0,5\text{€}(2) \qquad 0,5\text{€}(1) + 0,5\text{€}(3)$$

$$0,5\text{€}(1) + 0,5\text{€}(4) \qquad 0,5\text{€}(2) + 0,5\text{€}(3)$$

$$0,5\text{€}(2) + 0,5\text{€}(4) \qquad 0,5\text{€}(3) + 0,5\text{€}(4)$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $15^{(*)} + 1 = 16$

(*) O examinando explicita a forma como efectuou a contagem dos casos possíveis, apresentando um esquema (ver nota 5, relativa ao 1.º processo).

Exemplo 2

$$cp = {}^4C_2 + {}^2C_2 = 18$$

$$cf = {}^2C_2 = 4$$

$$p = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $15^{(*)} + 0^{(**)} = 15$

(*) A resposta do examinando é equivalente a $\frac{{}^2C_2}{{}^4C_2 + {}^2C_2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$, pelo que devem ser atribuídos os 15 pontos relativos à escrita da fracção $\frac{{}^2C_2}{{}^4C_2 + {}^2C_2}$

(**) o examinando erra o cálculo de 2C_2 e de ${}^4C_2 + {}^2C_2$, pelo que erra o resultado final (apesar da passagem correcta $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$).

Exemplo 3

Admita-se que, na alínea anterior, o examinando indica

$$\text{Soma 1€: } {}^4C_2 = 6$$

$$\text{Soma 2€: } {}^2C_2 = 1$$

e que, na resolução desta alínea, o examinando escreve:

Casos favoráveis: 1

Casos possíveis: $6 + 1 = 7$

$$p = \frac{1}{7}$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $15^{(*)} + 1 = 16$

(*) O examinando não explicita a forma como efectuou a contagem dos casos possíveis, mas percebe-se que utiliza dados obtidos na resolução da alínea anterior (ver nota 5, relativa ao 1.º processo).

Exemplo 4

Admita-se que, na alínea anterior, o examinando apresentou a tabela

	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
1	1,5	1,5	1,5	1,5	2	2
1	1,5	1,5	1,5	1,5	2	2

e que, na resolução desta alínea, o examinando escreve:

$$p = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $8^{(*)} + 1 = 9$

(*) O examinando não explicita a forma como efectuou a contagem dos casos possíveis, mas percebe-se que utiliza dados obtidos na resolução da alínea anterior (ver nota 5, relativa ao 1.º processo). A fracção escrita pelo examinando é equivalente à do segundo exemplo da nota 2, relativa ao 1.º processo, pelo que deve ser cotada com 8 pontos.

Exemplo 5

$$cp = 6 \times 6 = 36 \qquad cf = 2 \times 2 = 4 \qquad p = \frac{4}{36}$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $0^{(*)} + 0 = 0$

(*) Ver nota 4, relativa ao 1.º processo.

Exemplo 6

$$\text{Casos possíveis: } 2 \text{ (soma} = 1 \text{ ou soma} = 2) \qquad \text{Casos favoráveis: } 1 \text{ (soma} = 2) \qquad p = \frac{1}{2}$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $0^{(*)} + 0^{(**)} = 0$

(*) Ver nota 4, relativa ao 1.º processo.

(**) Ver nota 6, relativa ao 1.º processo.

Exemplo 7

Admita-se que, na alínea anterior, o examinando obtém a distribuição de probabilidades

x_i	1	1,5	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

e que, na resolução desta alínea, o examinando escreve:

A : retiram-se duas moedas iguais B : a quantia retirada é 2€

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{15}} = \frac{1}{7}$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $3 + 5^{(*)} + 5^{(*)} + 2 + 1 = 16$

(*) Ver nota relativa ao 2.º processo.

4.1.14

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) 5
 Derivada de x^2 1
 Derivada de e^{-x} 1
 Restantes cálculos 3

Determinar os zeros de f' 3
 Escrever a equação $f'(x) = 0$ 1
 Aplicação da lei do anulamento do produto 1
 Restantes cálculos 1

Estudo do sinal de f' e consequente conclusão, relativamente à monotonia e extremos de f (estudo que pode ser apresentado através de um quadro) 4
 Primeira linha do quadro (relativa à variável x) 1
 Sinal de f' 2
 Relação entre o sinal de f' e a monotonia de f 1

Determinar o mínimo (imagem de 0) 2

Nota:

Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a expressão da derivada da função, a cotação mínima a atribuir a esta etapa é de 1 ponto.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$f'(x) = 6x e^{-x} + 3x^2 - e^{-x} = e^{-x}(6x - 1) + 3x^2$$

$$e^{-x}(6x - 1) + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{impossível}} \vee 6x - 1 = 0 \vee 3x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \vee x = 0$$

x		0		$\frac{1}{6}$	
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$		0		min	

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = 1 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 e^{-1/6} = 1 + \frac{1}{12} e^{-1/6}$$

Cotação a atribuir: $2(1 + 1 + 0) + 1(1 + 0 + 0) + 2(1 + 0 + 1) + 2 = 7$

Exemplo 2

$$f'(x) = 6x e^{-x} + 3x^2 \cdot (-e^{-x}) = 6x e^{-x} - 3x^2 e^{-x}$$

$$6x e^{-x} - 3x^2 e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x e^{-x} = 3x^2 e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 = 3x \Leftrightarrow x = 2$$

x		2	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		min	

$$f(2) = 1 + 3 \cdot 2^2 \cdot e^{-2} = 1 + 12e^{-2}$$

Cotação a atribuir: $5(1 + 1 + 3) + 1(1 + 0 + 0) + 2(1 + 0 + 1) + 2 = 10$

Exemplo 3

$$f'(x) = 6x e^{-x} + 3x^2 \cdot (-e^{-x}) = 6x e^{-x} - 3x^2 e^{-x}$$

$$f'(x) = 0$$

Depois faz-se a tabela de sinais, substitui-se a derivada para achar valores + ou - antes e depois dos zeros.

Onde a derivada for + a função cresce, onde a derivada for - a função decresce.

Cotação a atribuir: $5(1 + 1 + 3) + 1(1 + 0 + 0) + 0(0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)}) + 0 = 6$

(*) Ver critério geral 8.

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Equacionar o problema ($f(x) = 4$)	2
Referir que f é contínua em $[-1, 0]$	2
Calcular $f(-1)$	2
Calcular $f(0)$	2
Referir que $f(0) < 4 < f(-1)$	3
Evocar o Teorema de Bolzano para concluir o pretendido (ver nota)	3

Nota:

Se o examinando conclui o pretendido, mas não refere que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano, devem ser atribuídos 2 dos 3 pontos previstos para esta etapa.

2.º Processo

Equacionar o problema ($f(x) = 4$)	2
Considerar a função g , definida por $g(x) = f(x) - 4$	1
Referir que g é contínua em $[-1, 0]$	1
Calcular $g(-1)$	2
Calcular $g(0)$	2
Referir que $g(0)$ e $g(-1)$ têm sinais contrários.....	3
Evocar o Teorema de Bolzano (ou o seu corolário) para concluir o pretendido (ver nota)	3

Nota:

Se o examinando conclui o pretendido, mas não refere que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano (ou do seu corolário), devem ser atribuídos 2 dos 3 pontos previstos para esta etapa.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$1 + 3x^2 e^{-x} = 4 \Leftrightarrow \underbrace{3x^2 e^{-x} - 3}_{g(x)} = 0$$

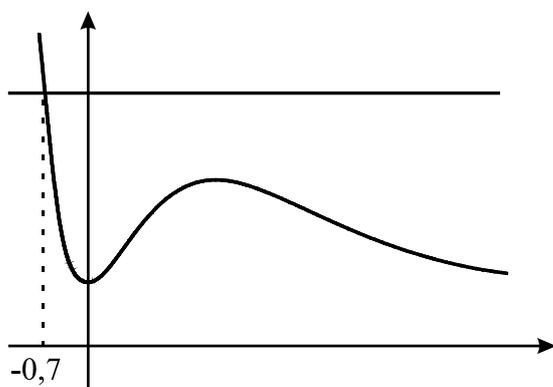
$$g(-1) = 3e - 3 \quad g(0) = -3 \quad g(-1) \times g(0) < 0$$

Logo, a função g tem pelo menos um zero em $] -1, 0[$

Cotação a atribuir (2.º processo): $2 + 1 + 0 + 2 + 2 + 3 + 2^{(*)} = 12$

(*) O examinando não refere que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano.

Exemplo 2



Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Ver critério geral 7.

Exemplo 3

$$1 + 3x^2 e^{-x} = 4 \Leftrightarrow 3x^2 e^{-x} = 3 \Leftrightarrow x^2 e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \vee e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{e}$$

Como $-\frac{1}{e} \in] -1, 0[$, é verdade.

Cotação a atribuir (1.º processo): $2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 2$

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos:

1.º Processo

Substituir, na expressão da função V , x por 2π (ver nota 1)	10
$V(2\pi) \approx 503$ (ver nota 2)	4

Notas:

1. Se o examinando substituir, na expressão da função V , x por 360, deve ser penalizado em 5 pontos.
2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou não o arredondar correctamente, deve ser penalizado em 2 pontos.

2.º Processo

Substituir, na expressão da função V , x por π	3
$V(\pi) \approx 251,327$	4
$2 \times 251,327 \approx 503$ (ver nota 1)	7

Notas:

1. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou não o arredondar correctamente, deve ser penalizado em 2 pontos.
2. Se o examinando substituir, na expressão da função V , x por 180, deve ser penalizado em 5 pontos, na cotação total a atribuir à alínea, sem prejuízo do critério geral 1.

3.º Processo

$V'(x) = 80(1 - \cos x)$	2
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$	1
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2\pi$ (ver nota 1)	2
$V'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 2\pi[$ (ver nota 2)	1
Concluir que a função é máxima para $x = 2\pi$ (ver nota 2)	2
Substituir, na expressão da função V , x por 2π	2
$V(2\pi) \approx 503$ (ver nota 3)	4

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar a expressão geral dos ângulos cujo co-seno é 1, e só depois indicar as soluções da equação $V'(x) = 0$, no domínio da função V . Neste caso, os 2 pontos atribuídos à equivalência $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2\pi$ deverão ser distribuídos da seguinte forma:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 1$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2\pi \dots\dots\dots 1$$

2. O examinando pode apresentar o estudo do sinal da derivada e da monotonia da função, por meio de um quadro. Neste caso, se o domínio da função V não for respeitado, deve ser atribuído 1 dos 3 pontos previstos para estas duas etapas.
3. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou não o arredondar correctamente, deve ser penalizado em 2 pontos.
4. Se o examinando utilizar a unidade grau, em vez da unidade radiano, deve ser penalizado em 5 pontos, na cotação total a atribuir à alínea, sem prejuízo do critério geral 1.

4.º Processo

Esboçar o gráfico da função V , obtido na calculadora (**ver nota 1**) 2

Valor pedido ≈ 503 (**ver notas 2 e 3**) 12

Notas:

1. Se o examinando não respeitar o domínio da função V , que é o intervalo $[0, 2\pi]$, deve ser penalizado em 1 ponto.
2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou não o arredondar correctamente, deve ser penalizado em 2 pontos.
3. O examinando pode obter este valor, a partir do gráfico, por dois processos diferentes: ou procura directamente o máximo da função V , ou começa por encontrar o maximizante e determina a sua imagem. No primeiro caso, terá de existir evidência da procura do máximo da função (por exemplo, indicando, no gráfico, a ordenada do ponto correspondente), sem a qual não devem ser atribuídos os 12 pontos deste passo.
No segundo caso:
 - a substituição de x por 2π (ou por um valor aproximado de 2π), na expressão de V , deve ser cotada com 8 pontos;
 - o cálculo de $V(2\pi)$ deve ser cotado com 4 pontos;
 - se o examinando utilizar a unidade grau, em vez da unidade radiano, deve ser penalizado em 5 pontos, na cotação total a atribuir à alínea, sem prejuízo do critério geral 1.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$V(x) = 80(2\pi - \text{sen } 2\pi) \approx 503$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $10 + 4 + (-1)^{(*)} = 13$

(*) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando escreve uma expressão inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal: $V(x) = 80(2\pi - \text{sen } 2\pi)$ - ver critério geral 6.

Exemplo 2

$$V(2\pi) = 80(2\pi - \text{sen } 2\pi) = 160\pi - 80 \text{sen } 2\pi = 160\pi - 0 = 160\pi$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $10 + 2^{(*)} = 12$

(*) Deve ser penalizado em 2 dos 4 pontos da segunda etapa - ver nota 2 do 1.º processo.

Exemplo 3

$$V(180) = 80(180 - \text{sen } 180) = 80 \times 181 = 14480$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $3 + 0 + 0 + (-5)^{(*)} = -2 \rightarrow 0^{(**)}$

(*) Ver nota 2 do 2.º processo.

(**) Ver critério geral 1.

Exemplo 4

$$V'(x) = 80 - 80 \cos x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k2\pi$$

$$k = 1 \Rightarrow x = 6,28$$

$$k = 2 \Rightarrow x = 12,57$$

	0		6,28		12,57	$+\infty$
$V'(x)$		+	0	+	0	+
$V(x)$		\nearrow		\nearrow		\nearrow

A função V é crescente em todo o seu domínio. Desta forma, quanto maior for a amplitude do arco ABC maior será a capacidade do depósito.

Cotação a atribuir (3.º processo): $2 + 1^{(*)} + 1^{(**)} + 1^{(***)} + 0^{(***)} + 0 + 0 = 5$

(*) Etapa implícita (ver critério geral 4.5).

(**) Nota 1 do 3.º processo.

(***) Nota 2 do 3.º processo.

Exemplo 5

$$0 \leq \text{sen } x \leq 1$$

$$x - 0 \leq x - \text{sen } x \leq x - 1$$

$$80(x - 0) \leq 80(x - \text{sen } x) \leq 80(x - 1)$$

Cotação a atribuir: 0

Equacionar o problema: $V(x) = 300$ (ver nota 1) 4

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação (ver nota 2)..... 5

$x \approx 3,4$ (ver nota 3) 5

Notas:

1. O examinando pode não apresentar (explicitamente) esta equação. Havendo evidência de que o examinando procura, por algum processo, o objecto cuja imagem, por meio de V , é 300, deverá ser-lhe atribuída a cotação de 4 pontos.

2. A explicação do método utilizado deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Apresentação do gráfico da função V (que respeite o domínio $[0, 2\pi]$), bem como do ponto de ordenada 300 e respectiva abcissa 5

Apresentação do gráfico e do ponto referidos, com algumas incorrecções (por exemplo, o gráfico de V não respeita o domínio) e/ou ausência de alguns elementos 3 ou 4

Ausência de explicação, simples referências do tipo "Vi na calculadora" ou utilização de um processo não gráfico, como, por exemplo, uma tabela..... 0

3. A escrita da solução da equação deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas, de acordo com o enunciado):

Resposta 3,4 5

Resposta 3,5 3

Resposta 3,3 ou 3,6 2

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às décimas):

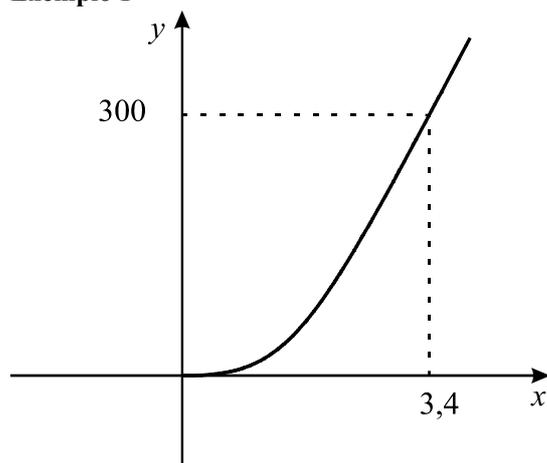
Valor no intervalo $[3,44 ; 3,46]$	3
Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[3,40 ; 3,50]$	2
Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[3,30 ; 3,60]$	1
Outros resultados	0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Valor igual a 3	1
Outros resultados	0

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1



A amplitude terá de ser de 3,4 radianos para que existam 300 m^3 de combustível no depósito.

Cotação a atribuir: $4^{(*)} + 5 + 5 = 14$

(*) Ver a nota 1 (página anterior).

Exemplo 2

$$300 = 80(x - \text{sen } x)$$

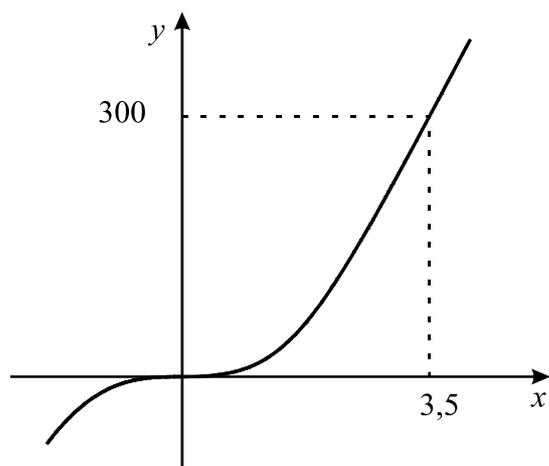
Indo à tabela, verifica-se que, quando $x \approx 3,5$ $y \approx 300$

Cotação a atribuir: $4 + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 4$

(*) O examinando desrespeita a indicação, expressa no enunciado, de que se pretendia uma resolução gráfica da equação.

Exemplo 3

$$80(x - \text{sen } x) = 300$$



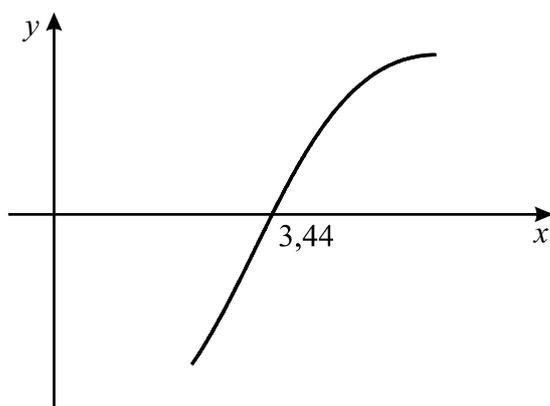
Para que existam 300 m³ de combustível no depósito, o ângulo terá de ter uma amplitude de 3,5 radianos.

Cotação a atribuir: $4 + 4^{(*)} + 3 = 11$

(*) O gráfico apresentado pelo examinando não respeita o domínio da função (uma parte do gráfico está contida no terceiro quadrante), mas contém todos os elementos necessários.

Exemplo 4

$$80(x - \text{sen } x) = 300 \Leftrightarrow x - \text{sen } x = \frac{300}{80} \Leftrightarrow x - \text{sen } x - 3,75 = 0$$



$$x \approx 3,44$$

Cotação a atribuir: $4 + 5 + 3 = 12$

5.3. 14

$x = \frac{2\pi}{3}$ (ver nota 1)..... 12

Escrever uma equação trigonométrica que conduza à resolução do problema..... 6

Solução da equação 3

Valor de x 3

$V\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 98$ (ver notas 2 e 3)..... 2

Notas:

1. O examinando pode recorrer a um esquema para concluir que $x = \frac{2\pi}{3}$.

Neste caso, a cotação a atribuir a esta etapa deverá ser feita do seguinte modo:

Esquema adequado, acompanhado de justificação correcta e completa..... 12

Esquema adequado, mas não acompanhado de justificação 7

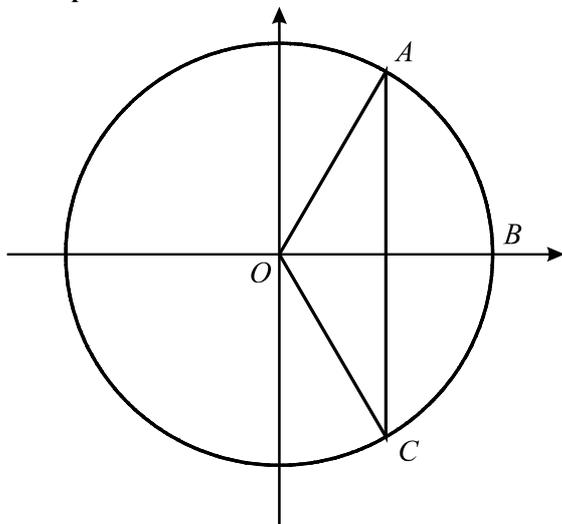
Esquema inadequado 0

2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou não o arredondar correctamente, deve ser penalizado em 1 ponto.

3. Não deve ser valorizado o cálculo de expressões do tipo $V\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $V\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $V\left(\frac{1}{4}\right)$, $\frac{V(\pi)}{2}$, etc., a não ser que provenham de algum raciocínio correcto, e o examinando tenha cometido algum erro de cálculo (que tenha conduzido a alguma das expressões referidas, ou a outras do mesmo tipo).

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1



$$A\hat{O}B = C\hat{O}B \quad \cos(A\hat{O}B) = 0,5 \quad \text{logo} \quad A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$$

$$A\hat{O}C = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad V\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 98$$

Cotação a atribuir: $12(6 + 3 + 3) + 2 = 14$

Exemplo 2

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$V\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 80\left(\frac{\pi}{2} - \text{sen} \frac{\pi}{2}\right) =$$

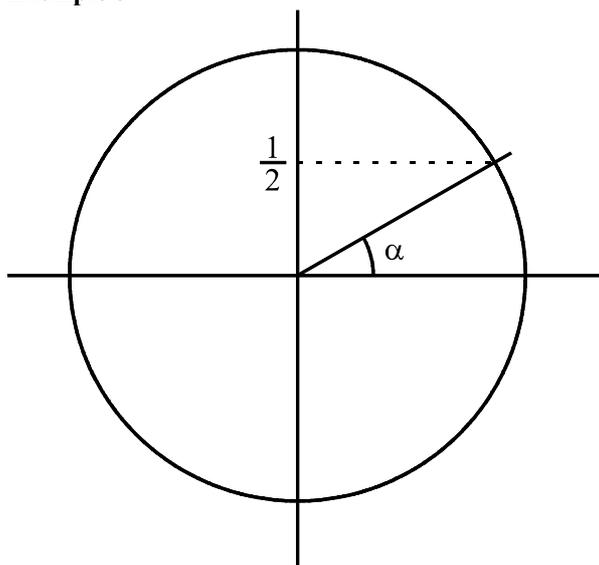
$$= 80\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) =$$

$$= 40\pi - 80 \approx 46$$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) De acordo com a nota 3, não deve ser valorizado o cálculo de $V\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Exemplo 3

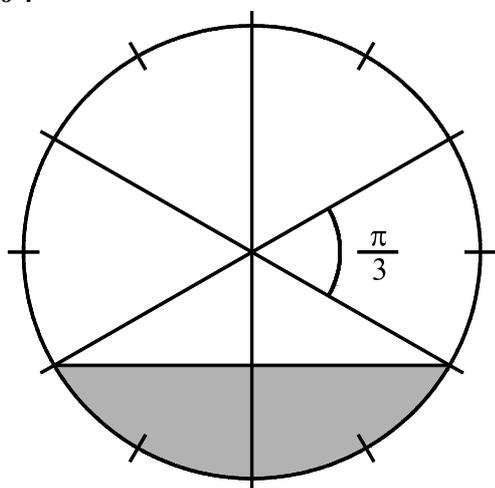


$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \quad \pi + \frac{2\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} \quad 2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

O arco do depósito, quando a altura é $\frac{1}{4}$, é $\frac{2\pi}{3}$ $V\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 80\left(\frac{2\pi}{3} - \text{sen } \frac{2\pi}{3}\right) \approx 98$

Cotação a atribuir: $12(6 + 3 + 3) + 2 = 14$

Exemplo 4



$$x = 2 \times \frac{\pi}{3} \quad V\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 80\left(\frac{2\pi}{3} - \text{sen } \frac{2\pi}{3}\right) \approx 98$$

Cotação a atribuir: $7^{(*)} + 2 = 9$

(*) Ver nota 1.

Na tabela seguinte, indica-se como esta questão deve ser cotada:

Conteúdo	Forma	Nível 1 (*)	Nível 2 (*)	Nível 3 (*)
O examinando exclui correctamente três opções.		14	12	10
O examinando exclui correctamente duas opções.		9	7	5
O examinando exclui correctamente uma opção.		5	3	1

(*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

Nível 2 - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

Nível 3 - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia.

Nota:

Se o examinando se limitar a escolher uma das opções (correcta ou não), não apresentando qualquer justificação, deverá ser-lhe atribuída a cotação de 0 pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

O gráfico C não se adequa à situação descrita pois, à medida que o tempo passa, a altura do combustível no depósito nunca diminui.

O gráfico D também não é o correcto, pois, neste gráfico, a taxa de variação, em cada instante, é constante. Ora, dada a forma do depósito, há instantes em que a taxa de variação da altura do combustível é maior do que noutros, pelo que a taxa de variação não é constante.

O gráfico A também não traduz a situação descrita, porque, dada a forma do depósito, é nos primeiros e nos últimos instantes que a taxa de variação da altura do combustível é maior, ao contrário do que o gráfico A nos mostra.

Portanto, o gráfico correcto é o gráfico B.

Cotação a atribuir: 14^(*)

(*) o examinando exclui correctamente três opções, numa redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

Exemplo 2

A curva C nunca poderia ser, pois a altura do combustível nunca poderia diminuir.

A curva D também não demonstra o que acontece, pois o tempo não é directamente proporcional à altura.

Penso que será a curva A, pois a altura do combustível irá aumentar com o tempo, e quando o depósito estiver cheio, o volume do combustível mantém-se constante e, conseqüentemente, a altura.

Cotação a atribuir: 9^(*)

(*) o examinando exclui correctamente duas opções (gráficos C e D), numa redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

Exemplo 3

O gráfico B não pode ser aceite pois a altura nunca estabiliza, continuando sempre a crescer.

O gráfico C também não pois este indica que a determinado ponto a altura ia começar a diminuir.

O gráfico D também não pode ser o da função h pois a altura aumenta sempre, como se o depósito não tivesse limites.

Portanto, o gráfico correcto é o gráfico A.

Cotação a atribuir: 3^(*)

(*) o examinando exclui correctamente uma opção (gráfico C), numa redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade.