EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2005

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r *– raio da base;* g *– geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r *– raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\qquad$ (r *– raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\,,\; k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

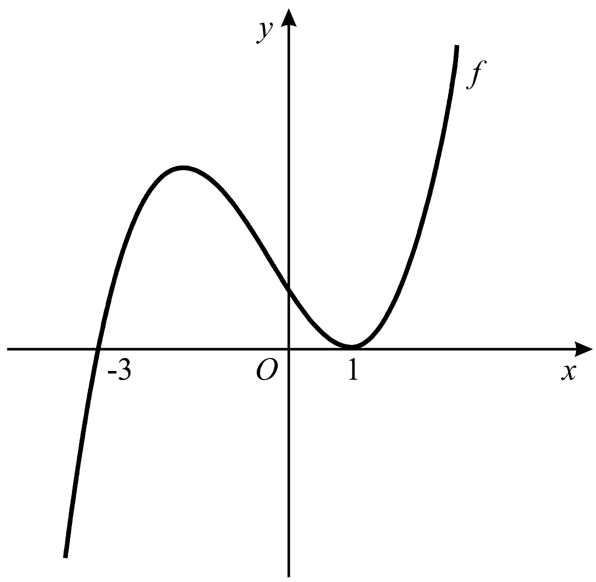
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f, contínua em $\mathbb{R}$.

A função f tem apenas dois zeros: -3 e 1.



Seja g a função definida por $g(x)=\sqrt{f(x)}$

Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função g?

(A) $]-\infty,\ 1]$

(B) $\mathbb{R}\setminus\{-3,1\}$

(C) $]-\infty,\ -3[$

(D) $[-3,\ +\infty[$

2. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{5\}$, contínua em todo o seu domínio.
Sabe-se que:

- $\lim_{x \to 5} f(x) = -3$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$

Em cada uma das opções seguintes, estão escritas duas equações, representando cada uma delas uma recta.

Em qual das opções as duas rectas assim definidas são as assimptotas do gráfico da função f ?

(A) $y = x$ e $y = 2$

(B) $y = 2$ e $x = 5$

(C) $y = x$ e $x = 5$

(D) $y = -3$ e $x = 2$

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$.

Qual das expressões seguintes dá a derivada de f, no ponto π ?

(A) $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$

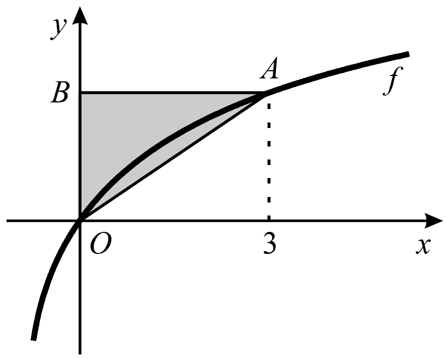
(B) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \pi}{x}$

(C) $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{x - \pi}$

(D) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x + \pi}$

4. Na figura junta, está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, definida, em $]-1, +\infty[$, por

$$f(x) = \log_2(x+1)$$



Na mesma figura, está também representado um triângulo rectângulo $[ABO]$.
O ponto A tem abcissa 3 e pertence ao gráfico de f.
O ponto B pertence ao eixo Oy.

Qual é a área do triângulo $[ABO]$?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

5. Seja Ω o espaço de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam X e Y dois acontecimentos ($X \subset \Omega$ e $Y \subset \Omega$).

Apenas uma das afirmações seguintes **não** é equivalente à igualdade $P(X \cap Y) = 0$. Qual?

(A) X e Y são acontecimentos incompatíveis.

(B) X e Y não podem ocorrer simultaneamente.

(C) Se X ocorreu, Y não pode ocorrer.

(D) X e Y são ambos impossíveis.

6. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela

x_i	0	2	4
$P(X = x_i)$	a	b	b

(a e b designam números reais).

A média da variável aleatória X é igual a 1.

Qual é o valor de a e qual é o valor de b?

(A) $a = \frac{1}{2}$ $\quad b = \frac{1}{4}$

(B) $a = \frac{3}{5}$ $\quad b = \frac{1}{5}$

(C) $a = \frac{2}{3}$ $\quad b = \frac{1}{6}$

(D) $a = \frac{1}{2}$ $\quad b = \frac{1}{6}$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2\, cis\, \frac{\pi}{4}$ e $z_2 = 2\, i$.

Sejam P_1 e P_2 as imagens geométricas, no plano complexo, de z_1 e de z_2, respectivamente.

Sabe-se que o segmento de recta $[P_1\, P_2]$ é um dos lados do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w.

Qual é o valor de n?

(A) 4 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 10

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. Considere $w = \dfrac{2+i}{1-i} - i$

Sem recorrer à calculadora, escreva w na forma trigonométrica.

1.2. Considere $z_1 = cis(\alpha)$ e $z_2 = cis\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Mostre que a imagem geométrica, no plano complexo, de $z_1 + z_2$ pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2. Admita que o número de elementos de uma população de aves, t anos após o início de 1970, é dado aproximadamente por

$$P(t) = 5{,}2 \times 10^7 \times e^{(N-M)\,t}\ , \qquad t \geq 0,$$

em que N e M são duas constantes, denominadas, respectivamente, *taxa de natalidade* e *taxa de mortalidade* da população.

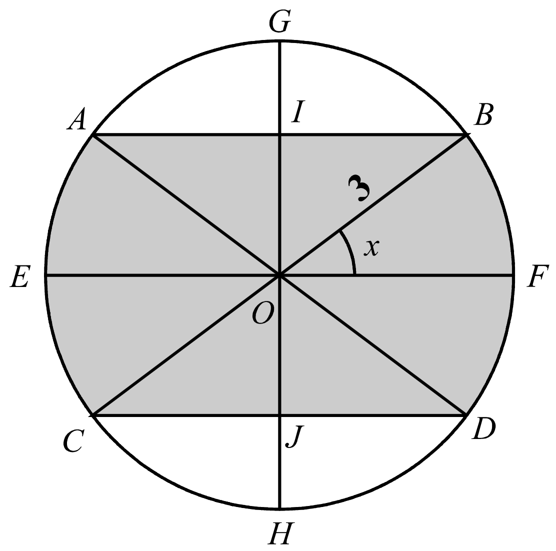
Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

2.1. Sabendo que $N < M$, calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t)$ e interprete o resultado obtido, no contexto do problema.

2.2. No início de 2000, a população era metade da que existia no início de 1970.
Sabendo que a *taxa de natalidade* é $7{,}56$, determine a *taxa de mortalidade*.
Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Na figura está representada uma circunferência com centro no ponto O e **raio** $\mathbf{3}$.
Os diâmetros $[EF]$ e $[GH]$ são perpendiculares.



Considere que o ponto B se desloca sobre o arco FG.

Os pontos A, C e D acompanham o movimento do ponto B, de tal forma que:
- as cordas $[AB]$ e $[CD]$ permanecem paralelas a $[EF]$;
- $[AD]$ e $[BC]$ são sempre diâmetros da circunferência.

Os pontos I e J também acompanham o mesmo movimento, de tal forma que são sempre os pontos de intersecção de $[GH]$ com $[AB]$ e $[CD]$, respectivamente.

Para cada posição do ponto B, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo FOB $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

3.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x, por

$$A(x) = 18\,(x + \operatorname{sen} x \,.\, \cos x)$$

Sugestão: use a decomposição sugerida na figura.

3.2. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: *Qual é o valor de x para o qual a área da região sombreada é igual a metade da área do círculo?*

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

4. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que a sua **derivada** é dada por

$$f'(x) = 2 + x \ln x \ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+$$

Sem recorrer à calculadora, resolva as alíneas seguintes:

4.1. Seja r a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.
Seja P o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox.
Sabendo que $f(1) = 3$, determine a abcissa do ponto P.

4.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

5. Num saco, estão três bolas pretas e nove bolas brancas, indistinguíveis ao tacto.
Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, as doze bolas do saco.
Determine:

5.1. A probabilidade de as duas primeiras bolas extraídas não serem da mesma cor. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5.2. A probabilidade de as três bolas pretas serem extraídas consecutivamente (umas a seguir às outras). Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

6. Considere um prisma regular em que cada base tem n lados.
Numa pequena composição, justifique que o número total de diagonais de todas as faces do prisma (incluindo as bases) é dado por

$$2\,({}^{n}C_2 \ - \ n) + 2\,n$$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 10
- **1.2.** 11

2. 28
- **2.1.** 14
- **2.2.** 14

3. 28
- **3.1.** 14
- **3.2.** 14

4. 28
- **4.1.** 14
- **4.2.** 14

5. 20
- **5.1.** 10
- **5.2.** 10

6. 12

TOTAL **200**