PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA (PROVA 435) 1ªFASE

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	D	A	A	C	D	C	C
Versão 2	C	C	B	A	D	A	B

Grupo II

1.1.

$$w=\frac{2+i}{1-i}-i=\frac{2+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}-i=\frac{2+2i+i+i^2}{1-i^2}-i=\frac{2+3i-1}{1+1}-i=\frac{1+3i}{2}-\frac{2i}{2}=$$
$$=\frac{1+3i-2i}{2}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$|w|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Seja $\theta=\arg(w)$

$\tan(\theta)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1 \quad \wedge\ \theta\in 1^{\text{o}}\text{Q}$, então $\theta=\frac{\pi}{4}$

Logo, $w=\frac{\sqrt{2}}{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$

1.2.

$$z_1+z_2=cis(\alpha)+cis\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$
$$=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)+\sin(\alpha)+i\cos(\alpha)=[\cos(\alpha)+\sin(\alpha)]+[\sin(\alpha)+\cos(\alpha)]\ i$$

Como z_1+z_2 tem parte real igual ao coeficiente da parte imaginária, logo o afixo de z_1+z_2 pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2.1.

$$\lim_{t\to+\infty}P(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(5{,}2\times10^7\times e^{(N-M)\cdot t}\right)=5{,}2\times10^7\lim_{t\to+\infty}\left(e^{(N-M)\cdot t}\right)$$

Como $N<M$ então $N-M<0$ e daí $\lim_{t\to+\infty}\left(e^{(N-M)\cdot t}\right)=0$ e logo $\lim_{t\to+\infty}P(t)=0$

Com o decorrer do tempo, a população de aves tende a extinguir-se.

2.2.

$$P(30)=\frac{1}{2}P(0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5{,}2\times10^7\times e^{(7{,}56-M)30}=\frac{1}{2}5{,}2\times10^7\times e^{(7{,}56-M)0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{(7{,}56-M)30}=\frac{1}{2}e^0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{226{,}8-30M}=\frac{1}{2}\times1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 226{,}8-30M=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M=\frac{226{,}8-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{30}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M\approx7{,}58$$

3.1.

$$A_{sombreada}=2\times A_{[AOB]}+4\times A_{sector(1)}=$$

$$=2\times9\cos x\cdot\sin x+4\times\frac{9x}{2}=$$

$$=18\cos x\cdot\sin x+18x=$$

$$=18(x+\cos x\cdot\sin x)\quad \text{c.q.d.}$$

Cálculo auxiliar

$$\sin x=\frac{\overline{OI}}{\overline{OB}}\Leftrightarrow\sin x=\frac{\overline{OI}}{3}\Leftrightarrow\overline{OI}=3\sin x$$

$$\cos x=\frac{\overline{IB}}{\overline{OB}}\Leftrightarrow\cos x=\frac{\overline{IB}}{3}\Leftrightarrow\overline{IB}=3\cos x$$

$$A_{[AOB]}=\frac{\overline{AB}\times\overline{OI}}{2}=\frac{2\overline{IB}\times\overline{OI}}{2}=\frac{2\times3\sin x\times3\cos x}{2}=9\cos x\cdot\sin x$$

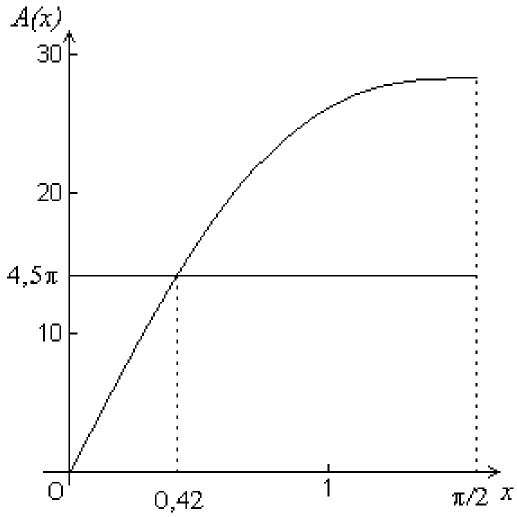
$$A_{sector(1)}=\frac{A_{circulo}}{\frac{2\pi}{x}}=\pi\times3^2\times\frac{x}{2\pi}=\frac{9x}{2}$$

(1) sector circular correspondente ao arco BF

3.2.

$$\frac{A_{círculo}}{2}=\frac{\pi\times 3^2}{2}=4{,}5\pi$$

O valor de x obtém-se resolvendo graficamente a equação $A(x)=4{,}5\pi$



Para que a área da região sombreada seja igual a metade da área do círculo, o valor de x é aproximadamente 0,42 rad.

4.1.

$$m=f'(1)=2+1\times\ln(1)=2+0=2$$

$$f(1)=3$$

A equação da recta r é do tipo $y=2x+b$

Então, $3=2\times 1+b \Leftrightarrow b=1$ e portanto, r tem equação $y=2x+1$

Intersecção com o eixo Ox:

$$0=2x+1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

R: A abcissa do ponto P é $-\frac{1}{2}$

4.2.

$$f''(x)=0+1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}=\ln(x)+1$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \ln(x)+1=0\Leftrightarrow \ln(x)=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

A função tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0,\frac{1}{e}\right]$ e voltada para cima em $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$ e admite um ponto de inflexão para $x=\frac{1}{e}$.

5.1.

$$P=\frac{3\times 9\times 10!\times 2}{12!}=\frac{9}{22}$$

5.2.

$$P=\frac{10\times 3!\times 9!}{12!}=\frac{1}{22}$$

6.

O prisma é constituído por duas bases, cada uma com n vértices. O número de segmentos de recta que se podem formar com os n vértices de uma das bases é ${}^{n}C_{2}$. Destes, n são lados do polígono, pelo que o número de diagonais que se podem formar em cada uma das bases é ${}^{n}C_{2}-n$. Como são duas bases, o número de diagonais definidas nas bases é $2\left({}^{n}C_{2}-n\right)$.

Por ser um prisma em que cada base tem n lados, o mesmo admite n faces laterais, tendo cada uma destas duas diagonais. Assim, o número de diagonais das faces laterais é $2n$.

Portanto, o número total de diagonais de todas as faces do prisma é dado por $2\left({}^{n}C_{2}-n\right)+2n$.

FIM

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em http://www.apm.pt