EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
2005

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ *(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)*

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ *(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)*

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad$ *(r – raio)*

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

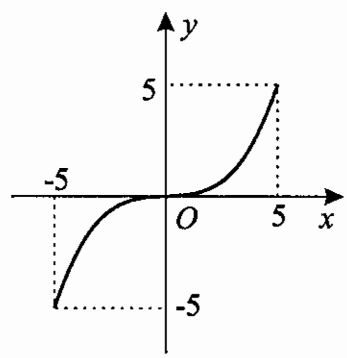
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

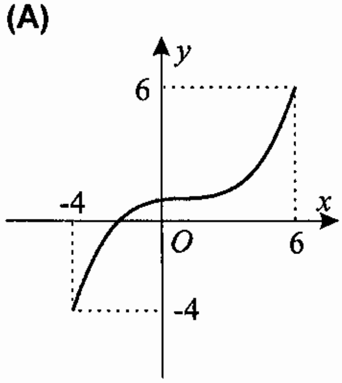
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Considere a função f, de domínio $[-5,5]$ e contradomínio $[-5,5]$, representada graficamente na figura junta.

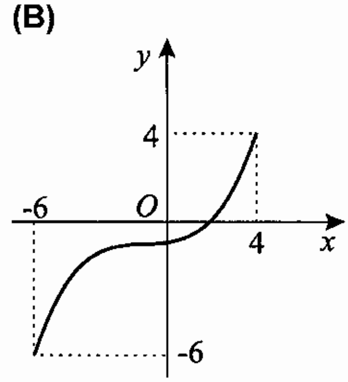
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g, definida por $g(x) = 1 + f(x+1)$?



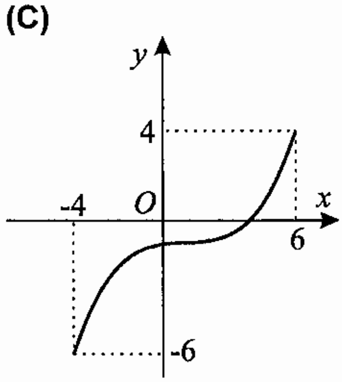
(A)



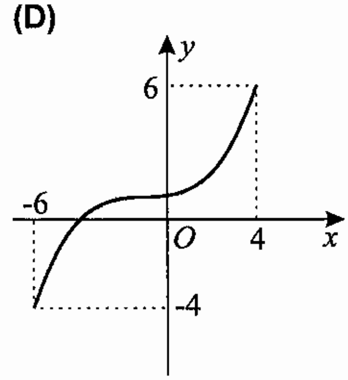
(B)



(C)



(D)



2. De uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que $f(3) = 8$ e $f(7) = 1$.
Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $1 \leq f(6) \leq 8$

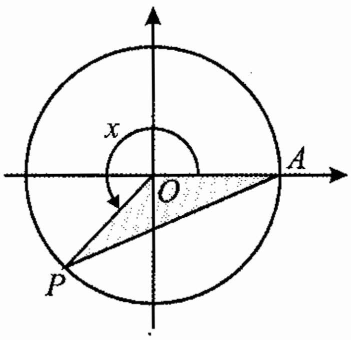
(B) A função f não tem zeros em $[3\,,\,7]$

(C) $f(4) > f(5)$

(D) 2 pertence ao contradomínio de f

3. Na figura junta está representado o círculo trigonométrico.

Considere que um ponto P parte de $A(1,0)$ e se desloca sobre a circunferência, dando uma volta completa, em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

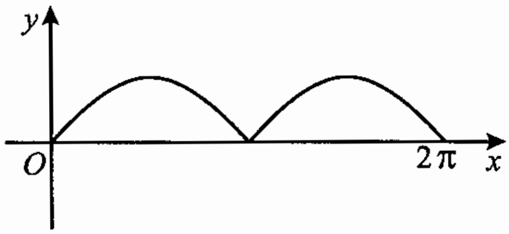


Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é a semi-recta $\dot{O}A$ e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}P$ $(\,x \in [0, 2\,\pi]\,)$.

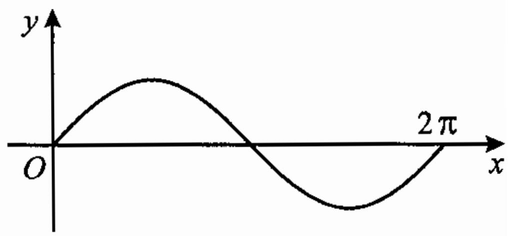
Seja g a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área da região sombreada (região limitada pelos segmentos de recta $[OP]$, $[PA]$ e $[AO]$).

Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função g?

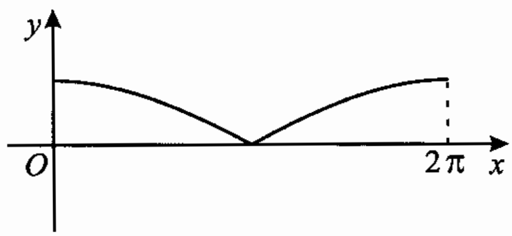
(A)



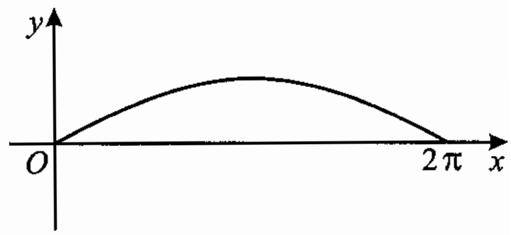
(B)



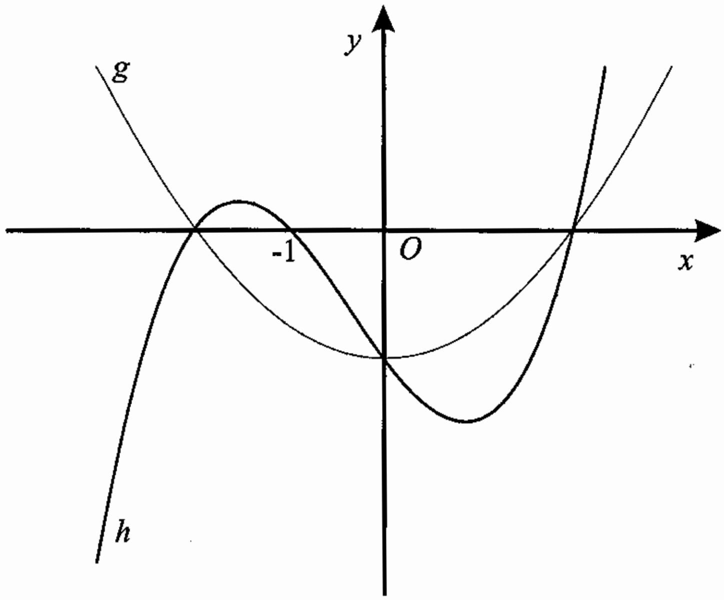
(C)



(D)



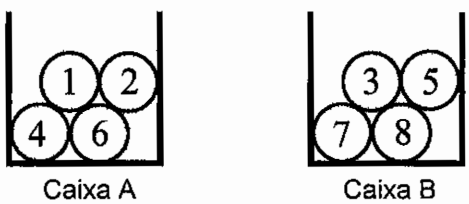
4. Na figura estão representadas partes dos gráficos de duas funções polinomiais, g e h, ambas de domínio $\mathbb{R}$.



Qual das expressões seguintes pode definir uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, tal que $f \times g = h$?

(A) $x-1$ **(B)** $-x+1$ **(C)** $x+1$ **(D)** $-x-1$

5. Considere duas caixas, A e B, cada uma delas contendo quatro bolas numeradas, tal como a figura abaixo ilustra.



Extraem-se, ao acaso, **duas** bolas da caixa A e **uma** bola da caixa B.
Multiplicam-se os números das três bolas retiradas.
Qual é a probabilidade de o produto obtido ser um número par?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $\frac{2\times 1}{{}^4C_2\times{}^4C_1}$ **(D)** $\frac{{}^3C_2\times{}^1C_1}{{}^4C_2\times{}^4C_1}$

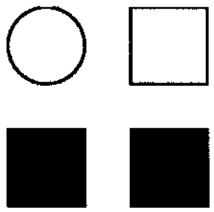
6. Em cada uma das opções seguintes (A, B, C e D) estão representadas quatro figuras (as figuras são círculos ou quadrados e estão pintadas de branco ou de preto).

Para cada opção, considere:

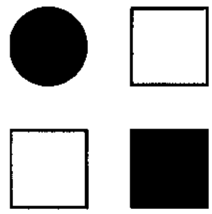
- a experiência que consiste na escolha aleatória de uma das quatro figuras;
- os acontecimentos:
  X: *«a figura escolhida é um quadrado»*;
  Y: *«a figura escolhida está pintada de preto»*.

Em qual das opções se tem $P(X \mid Y) = \frac{1}{2}$?

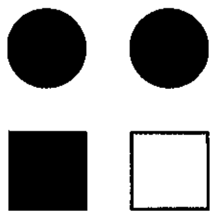
(A)



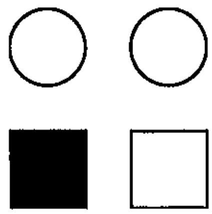
(B)



(C)



(D)



7. Em qual das opções seguintes estão duas raizes cúbicas de um mesmo número complexo ?

(A) $cis\,\frac{\pi}{6}$ e $cis\,\frac{5\pi}{6}$

(B) $cis\,\frac{\pi}{3}$ e $cis\,\frac{2\pi}{3}$

(C) $cis\,\frac{\pi}{4}$ e $cis\,\frac{3\pi}{4}$

(D) $cis\,\frac{\pi}{2}$ e $cis\,\frac{3\pi}{2}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$w_1 = 1 + i \,, \qquad w_2 = \sqrt{2}\; cis\, \frac{\pi}{12} \qquad \text{e} \qquad w_3 = \sqrt{3}\; cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine o valor de $\dfrac{w_1 \times w_2 - 2}{w_3}$

Apresente o resultado na **forma algébrica**.

1.2. Represente, no plano complexo, a região definida pela condição

$$Re\,(z) \geq Re(w_1) \qquad \wedge \qquad |z - w_3| \leq \sqrt{3}$$

2. O João tem catorze discos de música ligeira:

- seis são portugueses;
- quatro são espanhóis;
- três são franceses;
- um é italiano.

2.1. O João pretende seleccionar quatro desses catorze discos.

2.1.1. Quantos conjuntos diferentes pode o João fazer, de tal modo que os quatro discos seleccionados sejam de quatro países diferentes, ou seja, um de cada país?

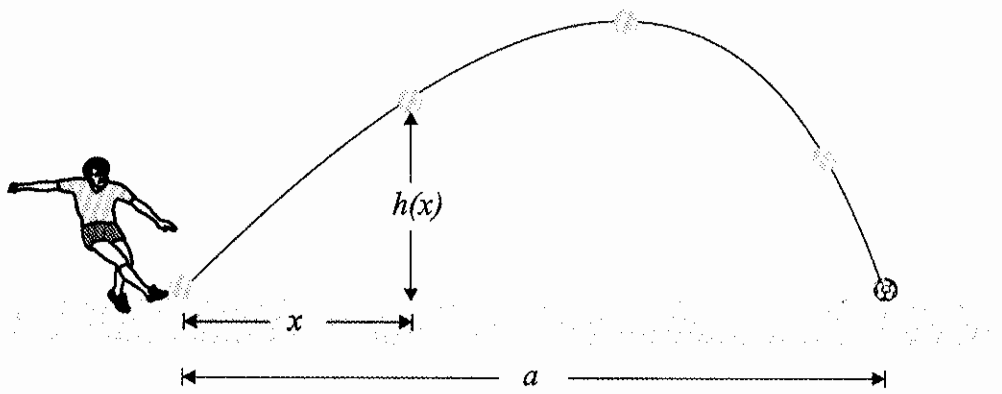
2.1.2. Quantos conjuntos diferentes pode o João fazer, de tal modo que os quatro discos seleccionados sejam todos do mesmo país?

2.2. Considere agora a seguinte experiência: o João selecciona, ao acaso, quatro dos catorze discos.

Seja X a variável aleatória: «***número de discos italianos seleccionados***».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fracção irredutível.

3. Na figura está representada a trajectória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador da selecção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.



Designou-se por a a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu.

Considere a função h definida em $[0, a]$ por

$$h(x) = 2\,x + 10 \ln(1 - 0{,}1\,x) \qquad \left(\ln \text{ designa logaritmo de base } e\right)$$

Admita que $h(x)$ é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projecção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.

3.1. **Recorrendo à calculadora**, determine o valor de a, arredondado às centésimas. **Explique como procedeu, apresentando todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora.**

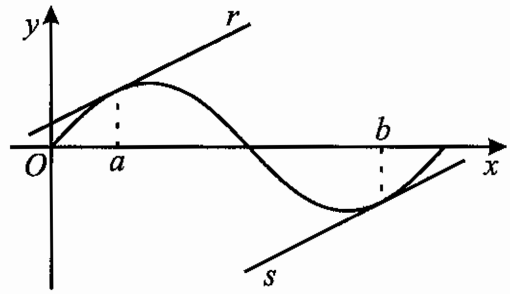
3.2. **Sem utilizar a calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos**, estude a função h quanto à monotonia e conclua qual foi a maior altura que a bola atingiu, relativamente ao solo, depois de pontapeada. Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

3.3. **Sem utilizar a calculadora**, mostre que a taxa de variação média da função h, no intervalo $[1\,,3]$, é

$$\ln\left[e^2\left(\frac{7}{9}\right)^5\right]$$

4. Seja f a função, **de domínio** $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$

4.1. Na figura junta estão representados:



- o gráfico da função f;
- duas rectas, r e s, tangentes ao gráfico de f, nos pontos de abcissas a e b, respectivamente.

Prove que, se $a + b = 2\pi$, então as rectas r e s são paralelas.

4.2. Sem recorrer à calculadora, estude, quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, a função g, **de domínio** $]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$, definida por $g(x) = \dfrac{x}{f(x)}$

5. No início de 1972, havia quatrocentos lobos num determinado parque natural.
As medidas de protecção a lobos fizeram com que o referido número aumentasse continuamente. Os recursos do parque permitem que o número de lobos cresça até bastante perto de um milhar, mas não permitem que este valor seja ultrapassado.
Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função P que dá o número aproximado de lobos existentes no parque natural, t anos após o início de 1972.

(A) $\dfrac{1000}{1+e^{-0,5t}}$ **(B)** $\dfrac{1000}{1+1,5\,e^{-0,5t}}$

(C) $\dfrac{1200}{1+2\,e^{-t}}$ **(D)** $1000 - \dfrac{600\,(t^3+1)}{e^t}$

Qual é a expressão correcta? Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique as razões que o levam a rejeitar as outras três expressões **(apresente três razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada)**.
Nota: poder-lhe-á ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. **Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtido(s)**.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I	**63**
Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II				**137**
1.				21
	1.1.		12	
	1.2.		9	
2.				32
	2.1.		18	
		2.1.1. 8		
		2.1.2. 10		
	2.2.		14	
3.				42
	3.1.		14	
	3.2.		14	
	3.3.		14	
4.				28
	4.1.		14	
	4.2.		14	
5.				14
TOTAL				**200**