EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2005

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
  1.1. 12
  1.2. 9

2. 32
  2.1. 18
    2.1.1. 8
    2.1.2. 10
  2.2. 14

3. 42
  3.1. 14
  3.2. 14
  3.3. 14

4. 28
  4.1. 14
  4.2. 14

5. 14

TOTAL **200**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	D	D	A	C	B	B	A
Versão 2	B	D	B	A	A	D	B

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

   4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

   4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
   - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
   - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.

   4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

   4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

   4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

Para cada item são apresentados:

- a cotação total do item;
- para cada processo de resolução apresentado, uma subdivisão da cotação total em cotações parcelares;
- exemplos de possíveis respostas dos examinandos, com a respectiva cotação a atribuir, devidamente explicada.

1.1. .... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo (não efectua a subtracção no numerador):

Escrever w_1 na forma trigonométrica 2

Efectuar a multiplicação $w_1 \times w_2$ (na forma trigonométrica) 3

Escrever a fracção como diferença de duas fracções 1

Restantes cálculos 6

Escrever 2 na forma trigonométrica 1

Efectuar as divisões na forma trigonométrica ....2 (1+1)

Escrever os quocientes obtidos na forma algébrica .... 2 (1+1)

Simplificação final 1

ou

Efectuar a primeira divisão na forma trigonométrica 1

Escrever o quociente obtido na forma algébrica 1

Escrever w_3 na forma algébrica 1

Efectuar a segunda divisão na forma algébrica 1

Simplificação final 2

ou

Escrever o produto $w_1 \times w_2$ na forma algébrica 2

Escrever w_3 na forma algébrica 1

Efectuar as divisões na forma algébrica 2

Simplificação final 1

2.º Processo (efectua a subtracção no numerador):

Escrever w_1 na forma trigonométrica 2

Efectuar a multiplicação $w_1 \times w_2$ (na forma trigonométrica) 3

Escrever o produto $w_1 \times w_2$ na forma algébrica 2

Simplificar o numerador 1

Efectuar a divisão e apresentar o resultado final na forma algébrica..................... 4

Escrever w_3 na forma algébrica 1

Efectuar a divisão na forma algébrica 3

ou

Escrever o numerador na forma trigonométrica 1

Efectuar a divisão na forma trigonométrica 1

Escrever o resultado na forma algébrica 2

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\frac{\sqrt{2}\, cis\, \frac{\pi}{4} \times \sqrt{2}\, cis\, \frac{\pi}{12} - 2}{\sqrt{3}\, cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\, cis\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) - 2}{\sqrt{3}\, cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\, cis\, \frac{\pi}{3} - 2}{\sqrt{3}\, cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\, cis\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}\, cis\, \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(cis\, \frac{5\pi}{6}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}\, cis\, \frac{\pi}{2}}$$

Cotação a atribuir (1.º processo - 2ª alternativa): $2 + 3 + 0^{(*)} + 1\,(1 + 0 + 0 + 0 + 0) = 6$

(*) O denominador da segunda fracção está incorrecto.

Exemplo 2

$$\frac{w_1 \times w_2 - 2}{w_3} = \frac{(1+i)\times\sqrt{2}\,\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) - 2}{\sqrt{3}\,\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]} =$$

$$= \frac{(1+i)\times\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) - 2}{\sqrt{3}\,(0-i)} = \frac{(1+i)\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) - 2}{-\sqrt{3}\,i} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}\,i + \frac{\sqrt{6}}{2}\,i - \frac{1}{2} - 2}{-\sqrt{3}\,i} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{6}-5}{2} + \frac{1+\sqrt{6}}{2}\,i}{-\sqrt{3}\,i} \times \frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}\,i} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{18}\,i - 5\sqrt{3}\,i}{2} + \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{18}}{2}}{-3\times(-1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{18}\,i}{6} - \frac{5\sqrt{3}\,i}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{18}}{6} =$$

$$= -\,\frac{\sqrt{3}+\sqrt{18}}{6} + \frac{\sqrt{18} - 5\sqrt{3}}{6}\,i$$

Cotação a atribuir (2.º processo - 1ª alternativa): $0 + 0 + 0 + 1 + 4\,(1+3) = 5$

Exemplo 3

$$\frac{(1+i)\times(1{,}37 + 0{,}37\,i) - 2}{-\sqrt{3}\,i} =$$

$$= \frac{1{,}37 + 0{,}37\,i + 1{,}37\,i - 0{,}37 - 2}{-\sqrt{3}\,i} =$$

$$= \frac{-1 + 1{,}74\,i}{-\sqrt{3}\,i} = -\,\frac{1{,}74}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,i$$

Cotação a atribuir (2.º processo - 1ª alternativa): $0 + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 1\,(1 + 0^{(*)}) = 1$

(*) Ver critério geral 7.

Exemplo 4

$$\frac{(1+i)\times\sqrt{2}\ cis\,\frac{\pi}{12}}{\sqrt{3}\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1\ cis\,\frac{\pi}{4}\times\sqrt{2}\ cis\,\frac{\pi}{12}}{\sqrt{3}\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\ cis\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{3}\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\ cis\,\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ cis\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\ \ cis\,\frac{5\pi}{6} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= -\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}\,i =$$

$$= -\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}\,i$$

Cotação a atribuir (2.º processo - 2ª alternativa): $1^{(*)}+3+0^{(**)}+0^{(**)}+3\,(0^{(**)}+1+2)=7$

(*) O argumento está correcto, mas o módulo não.

(**) Devido ao engano na passagem do enunciado, o examinando não cumpre estas etapas.

1.2. .... **9**

Representar a região definida pela condição
$Re(z) \geq Re(w_1)$ **(ver notas 1 e 4)**.. 4

Representar a região definida pela condição
$|z - w_3| \leq \sqrt{3}$ **(ver notas 2 e 4)**.. 4

Assinalar a intersecção das duas regiões **(ver nota 3)**.................................... 1

Notas:

1. A representação da região definida pela condição $Re(z) \geq Re(w_1)$ deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Representação correcta (semiplano fechado, para a direita da recta definida por $Re(z) = 1$) 4

Semiplano aberto, para a direita da recta definida por $Re(z) = 1$ 3

Semiplano fechado, para a esquerda da recta definida por $Re(z) = 1$ 1

Outras situações 0

2. A representação da região definida pela condição $|z - w_3| \leq \sqrt{3}$ deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Representação correcta (círculo fechado, centrado na imagem geométrica de $-\sqrt{3}\,i$ e tangente ao eixo real) 4

Círculo aberto, centrado na imagem geométrica de $-\sqrt{3}\,i$ e tangente ao eixo real 3

Círculo centrado na imagem geométrica de $-\sqrt{3}\,i$, mas não tangente ao eixo real 2

Círculo centrado na imagem geométrica de $\sqrt{3}\,i$ e tangente ao eixo real 1

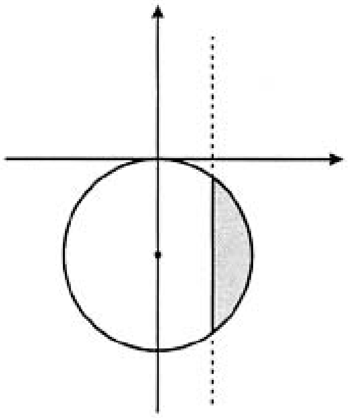
Outras situações 0

3. O ponto relativo à intersecção não deve ser atribuído no caso em que as cotações atribuídas às duas representações foram ambas iguais a zero.

4. Aceita-se que o examinando represente a traço contínuo ou a tracejado a parte da circunferência e a parte da recta que não pertencem à intersecção. Desde que a fronteira da região apresentada como resposta final esteja a traço contínuo, consideram-se como fechados o círculo e o semiplano cuja intersecção é a resposta ao problema.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1



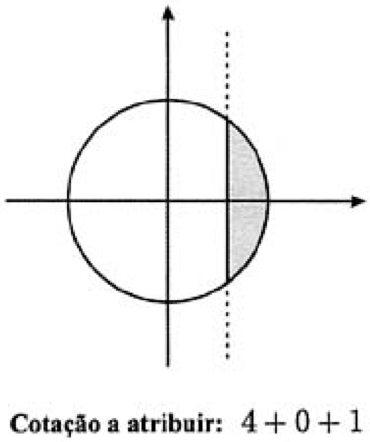
Cotação a atribuir: $4 + 4^{(*)} + 1 = 9^{(**)}$

(*) Apesar de o examinando não ter indicado as coordenadas do centro, considerou-se o círculo correctamente representado, atendendo ao facto de ser tangente ao eixo Ox e à distância a que o centro se encontra da origem (relativamente à distância do eixo imaginário à recta que limita a região sombreada).

(**) Ao atribuir a cotação máxima a esta resposta, não se está a contrariar o disposto no critério geral 2, apesar de o examinando não ter apresentado qualquer cálculo. De facto, a resolução desta alínea não exige cálculos, e o examinando não se limitou a apresentar o resultado final (a intersecção). A representação da recta e da circunferência constituem justificação bastante.

Exemplo 2

$$Re(z) \geq Re(w_1) \quad \wedge \quad |z - w_3| \leq \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad Re(z) \geq 1 \quad \wedge \quad \left|z + \sqrt{3}\right| \leq \sqrt{3}$$



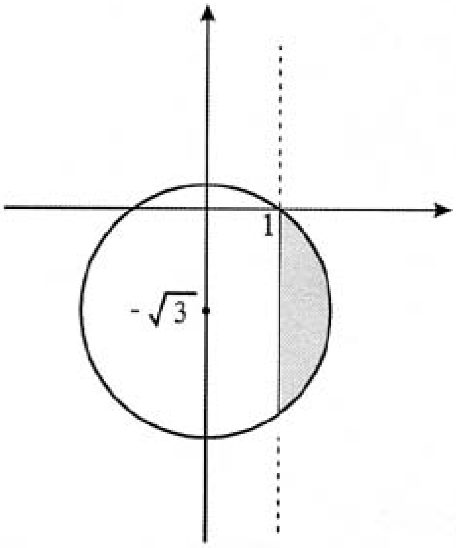
Cotação a atribuir: $4 + 0 + 1 = 5$

Exemplo 3

$$Re(z) \geq Re(w_1) \quad \wedge \quad |z - w_3| \leq \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Re(z) \geq 1 \quad \wedge \quad \left| z - (-\sqrt{3}\,i) \right| \leq \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow$$

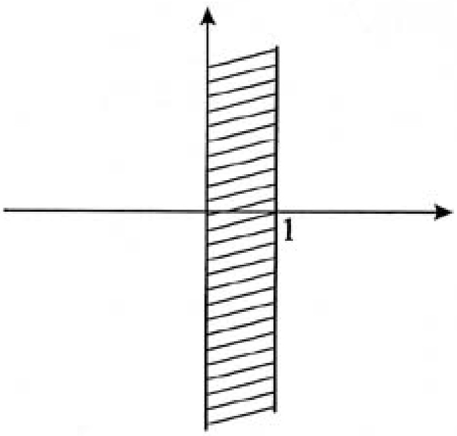
$$\Leftrightarrow Re(z) \geq 1 \quad \wedge \quad \left| z + \sqrt{3}\,i \right| \leq \sqrt{3} \qquad C(0, -\sqrt{3}) \qquad R = \sqrt{3}$$



Cotação a atribuir: $4 + 2^{(*)} + 1 = 7$

(*) Terceira situação referida na nota 2.

Exemplo 4



Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0 = 0$

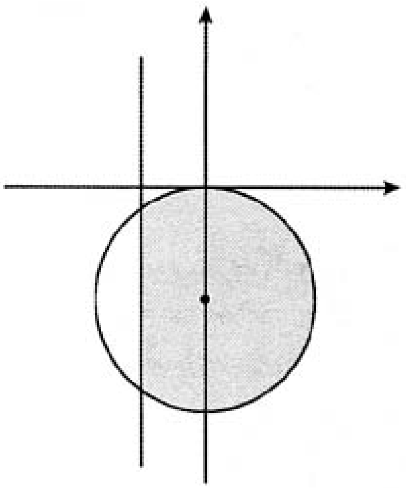
Exemplo 5

$Re(w_1) = -1$

$w_3 = \sqrt{3}\,cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\left[cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\sqrt{3}\,i$

$Re(z) \geq Re(w_1) \quad \wedge \quad |z - w_3| \leq \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Re(z) \geq -1 \quad \wedge \quad \left|z - (-\sqrt{3}\,i)\right| \leq \sqrt{3} \qquad C(0, -\sqrt{3})$

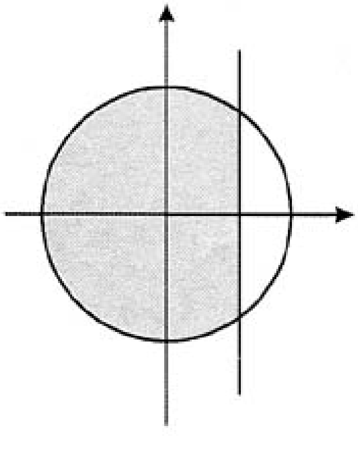


Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 4 + 1 = 8$

(*) A condição $Re(z) \geq -1$ está bem representada.
Penalizou-se em 1 ponto o erro $Re(w_1) = -1$, pois foi considerado um erro de distracção.

Exemplo 6

$w_3 = \sqrt{3}\,cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}\,i$



Cotação a atribuir: $1^{(*)} + 0 + 1 = 2$

(*) Terceira situação referida na nota 1.

2.1.1. .... **8**

Expressão que dá o número pedido **(ver notas 1 e 2)** 7

Resposta final **(ver nota 3)** 1

Notas:

1. A escrita da expressão que dá o número pedido deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

   Expressão que traduz uma contagem correcta do número pedido ($6 \times 4 \times 3 \times 1$ ou equivalente) 7

   Expressão que traduz uma contagem incorrecta do número pedido.............. 0

2. Se o examinando indicar a fracção cujo numerador é $6 \times 4 \times 3 \times 1$ (ou equivalente) e cujo denominador é ${}^{14}C_4$ (ou equivalente), fracção essa que dá a probabilidade de, numa escolha aleatória de quatro dos catorze discos, saírem quatro discos de países diferentes, pode considerar-se que o examinando cometeu um erro de distracção, que deve ser penalizado em 2 pontos. No caso de a fracção indicada para a probabilidade ser outra, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos, ainda que se trate de uma fracção equivalente.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

${}^{6}C_1 \times {}^{4}C_1 \times {}^{3}C_1 \times {}^{1}C_1 = 72$

Cotação a atribuir: $7 + 1 = 8$

Exemplo 2

$6 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$

Cotação a atribuir: $7 + 0 = 7$

Exemplo 3

$6 \times 4 \times 3 \times 1 \times 4! = 1728$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3.

Exemplo 4

72

Cotação a atribuir: 0

(*) Ver critério geral 2.

Exemplo 5

$casos\ possíveis = {}^{14}C_4$

$casos\ favoráveis = 6 \times 4 \times 3 \times 1$

$probabilidade = \frac{6\times4\times3\times1}{{}^{14}C_4} = \frac{72}{1001}$

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 1 = 6$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 6

$probabilidade = \frac{6\times4\times3\times1\times4!}{{}^{14}A_4} = \frac{1\,728}{24\,024}$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0^{(**)} = 0$

(*) Ver nota 2.

(**) Ver nota 3.

Exemplo 7

$probabilidade = \frac{6\times4\times3\times1}{{}^{14}A_4} = \frac{6\times4\times3\times1}{{}^{14}A_4} = \frac{3}{1001}$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0^{(**)} = 0$

(*) Ver nota 2.

(**) Ver nota 3.

2.1.2. .... **10**

Expressão que dá o número pedido **(ver notas 1 e 2)**.. 9

Resposta final **(ver nota 3)**.. 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão que dá o número pedido, com a respectiva cotação a atribuir.

   ${}^{6}C_{4} + {}^{4}C_{4}$ (ou equivalente) 9

   ${}^{6}C_{4} + 4$ 4

   Expressão que traduz uma contagem incorrecta do número pedido, diferente de ${}^{6}C_{4} + 4$ 0

2. Se o examinando indicar a fracção cujo numerador é ${}^{6}C_{4} + {}^{4}C_{4}$ (ou equivalente) e cujo denominador é ${}^{14}C_{4}$ (ou equivalente), fracção essa que dá a probabilidade de, numa escolha aleatória de quatro dos catorze discos, saírem quatro discos do mesmo país, pode considerar-se que o examinando cometeu um erro de distracção, que deve ser penalizado em 2 pontos. No caso de a fracção indicada para a probabilidade ser outra, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos, ainda que se trate de uma fracção equivalente.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\underbrace{6\times5\times4\times3}_{portugueses} + \underbrace{4\times3\times2\times1}_{espanhóis} + \underbrace{3\times2\times1\times0}_{franceses} + \underbrace{1\times0\times0\times0}_{italianos} = 384$$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3.

Exemplo 2

$^7C_4 + {}^4C_4 = 36$

Cotação a atribuir: $8^{(*)} + 1 = 9$

(*) Considerou-se a escrita de 7 como sendo um erro de distracção (equivalente a um erro ocasional de contas).

Exemplo 3

$^{14}C_4 - 72 = 929$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3.

Exemplo 4

$$p = \frac{6\times5\times4\times3}{14\times13\times12\times11} + \frac{4\times3\times2\times1}{14\times13\times12\times11} + \frac{3\times2\times1}{14\times13\times12} + \frac{1}{14} =$$

$$= \frac{360}{24024} + \frac{24}{24024} + \frac{6}{2184} + \frac{1}{14} = 23{,}2\%$$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0 = 0$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 5

$$p = \frac{^6C_4 + {}^4C_4}{^{14}C_4} = \frac{16}{1001}$$

Cotação a atribuir: $7^{(*)} + 1 = 8$

(*) Ver nota 2.

2.2. .... **14**

Valores da variável X **(ver notas 1 e 2)** 4

Probabilidades **(ver notas 3 e 4)**... 10

$P(X=0)$ **(ver nota 5)** 5

$P(X=1)$ **(ver nota 5)** 5

Notas:

1. A indicação, na tabela da distribuição de probabilidades, de um valor da variável X ao qual o examinando faça corresponder a probabilidade 0 deve ser considerada equivalente à não inclusão, nessa tabela, desse valor.

2. Esta etapa deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Indicação correcta dos dois valores que a variável X pode assumir (tenha-se em conta a nota 1) 4

Outras situações 0

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

4. Se as expressões apresentadas pelo examinando para as probabilidades de $X=0$ e de $X=1$ estiverem ambas incorrectas, mas a soma das probabilidades for igual a 1, deve ser atribuída a cotação de 2 dos 10 pontos desta etapa.

5. Se o examinando não apresentar, correctamente, o resultado na forma de fracção irredutível, deve ser penalizado em 1 ponto.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

x_i	0	1
p_i	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

$$P(X=0)=\frac{13\times12\times11\times10}{14\times13\times12\times11}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$$

$$P(X=1)=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$$

Cotação a atribuir: $4\;+\;10\,(5+5)=14$

Exemplo 2

X	0	1
x_i	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

$$P(\textit{não sair nenhum disco italiano}) = \frac{^{13}C_4}{^{14}C_4} = \frac{5}{7}$$

$$P(\textit{sair um disco italiano}) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

Cotação a atribuir: $4 + 10\,(5+5) + (-1)^{(*)} = 13$

(*) O examinando escreve uma expressão inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (x_i), na célula da tabela onde deveria estar uma referência a probabilidades (ver critério geral 6).

Exemplo 3

x_i	0	1	$Soma$
$p(x_i)$	$\frac{715}{^{14}C_4}$	$\frac{251}{^{14}C_4}$	1

$$p(0) = \frac{^{13}C_4}{^{14}C_4} = \frac{715}{1001} \qquad p(1) = \frac{251}{1001}$$

Cotação a atribuir: $4 + 8\,(4^{(*)} + 4^{(**)}) = 12$

(*) Ver nota 5.

(**) A indicação, na tabela, do valor da soma das probabilidades sugere que o examinando calculou a probabilidade de $X = 1$ calculando a diferença $1 - P(X = 0)$. O erro de cálculo cometido deve ser penalizado em 1 ponto. A fracção escrita pelo examinando já está na forma de fracção irredutível.

Exemplo 4

Não sair $\rightarrow$ $p = \dfrac{13\times12\times11\times10}{14\times13\times12\times11} = 0{,}71$

Sair $\rightarrow$ $p = \dfrac{6\times4\times3\times1}{14\times13\times12\times11} = 0{,}0029$

X	0	1
P	$0,714$	$0,003$

Cotação a atribuir: $4 + 4\,(4^{(*)} + 0) = 8$

(*) Ver nota 5.

Exemplo 5

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{13}{14}$	$\frac{1}{14}$	0	0	0

$P(I) = \frac{1}{14} \qquad P(\overline{I}) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$

Cotação a atribuir: $4^{(*)} + 2^{(**)} = 6$

(*) Apesar de o examinando ter indicado, na linha relativa aos valores possíveis da variável X, os valores 2, 3 e 4, deve ser atribuída a pontuação relativa à primeira etapa, dado que o examinando indica que é 0 (zero) a probabilidade de tais valores ocorrerem (ver nota 1).

(**) Ver nota 4.

Exemplo 6

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{14}$	0	0	0

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0 = 0$

(*) Ver notas 1 e 2.

Exemplo 7

x	1
p_i	1

Cotação a atribuir: 0

Exemplo 8

X	0	1
P	0	1

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Apesar de o examinando ter indicado, na linha relativa aos valores possíveis da variável X, os valores 0 e 1, deve ser atribuída a pontuação de 0 (zero) pontos a esta resposta, de acordo com a nota 1.
Observe-se ainda que esta resposta é equivalente à do exemplo 7.

3.1. .... **14**

Equacionar o problema: $h(x) = 0$ **(ver nota 1)** 3

Explicação do método utilizado para resolver a equação **(ver nota 2)**................ 3

Conclusão: $a \approx 7{,}97$ **(ver notas 3 e 4)** 8

Notas:

1. O examinando pode não apresentar (explicitamente) esta equação. Havendo evidência de que o examinando procura, por algum processo, o valor de x (diferente de zero) que anula a expressão $h(x)$, deverá ser-lhe atribuída a cotação de 3 pontos por esta etapa.

2. Os 3 pontos relativos à explicação do método utilizado devem ser atribuídos de acordo com o seguinte critério:

Apresentação correcta de parte do gráfico da função definida pela expressão $2x + 10\ln(1 - 0{,}1x)$, destacando, de alguma forma, o ponto de ordenada nula e abcissa positiva, e/ou transcrição correcta de uma tabela, e/ou referência correcta à utilização de ferramentas da calculadora (tal como *solve*), que evidenciem a procura do valor pedido 3

Explicação incompleta .... 1 ou 2

Não apresentação de qualquer gráfico, nem de qualquer explicação 0

3. A não apresentação de qualquer gráfico, nem de qualquer explicação, implicam também a atribuição de 0 (zero) pontos à escrita do valor de a, mesmo que este esteja correcto.

4. A escrita do valor pedido deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

<u>1.º Caso</u> (apresentação do resultado arredondado às centésimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $7{,}97$ 8

Resposta $7{,}96$ 6

Resposta $7{,}98$ 4

Resposta $7{,}95$ 2

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às centésimas):

Resposta $7{,}968$ 7

Resposta diferente de $7{,}968$, mas pertencente ao intervalo $[7{,}965\ ;\ 7{,}971]$ 5

Resposta fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[7{,}961\ ;\ 7{,}975]$ 3

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas):

Resposta $8{,}0$ 5

Resposta $7{,}9$ 3

Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Resposta 8 3

Outros resultados 0

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

A distância no solo irá ser Δx entre $x = 0$ e x de $f(0)$ à direita de $x = 0$.

$y = 0$ para $x = 0$ e $x = 7{,}968$ Logo $\Delta x = 7{,}968 - 0 = 7{,}968$

A distância em metros no solo correspondente ao percurso da bola é de $7{,}968$.

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 0 + 0^{(**)} + (-1)^{(***)} = 2$

(*) Ver nota 1.

(**) Ver nota 3.

(***) O examinando escreve uma expressão inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal: «x de $f(0)$», em vez de «x tal que $f(x) = 0$» (ver critério geral 6).

Exemplo 2

$y_1 = 2x + 10\,ln\,(1 - 0.1\,x)$

Fazendo "calc" "zero", descobrimos os pontos de intersecção do gráfico com $y = 0$.

$y_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7{,}969$

então, desde o momento 0 em que a bola vai ser pontapeada até regressar novamente ao solo, será no segundo 0, $x = 7{,}969$. Então $a = 7{,}969$

Cotação a atribuir: $3 + 3 + 5^{(*)} = 11$

(*) Ver nota 4 - 2º caso.

Exemplo 3

$0 = 2x + 10\,ln\,(1 - 0{,}1\,x)$

$x \approx 7{,}97$ de acordo com a calculadora.

A distância entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu é aproximadamente 7,97 metros.

Para determinar este valor, introduzi a expressão da função na calculadora e pedi o valor dos zeros. Existem dois zeros: $x = 0$ e $x \approx 7{,}97$

Como $x = 0$ não pode ser, pois corresponde ao valor inicial, antes da bola ser pontapeada, então tem de ser $x \approx 7{,}97$.

Cotação a atribuir: $3 + 3 + 8 = 14$

Exemplo 4

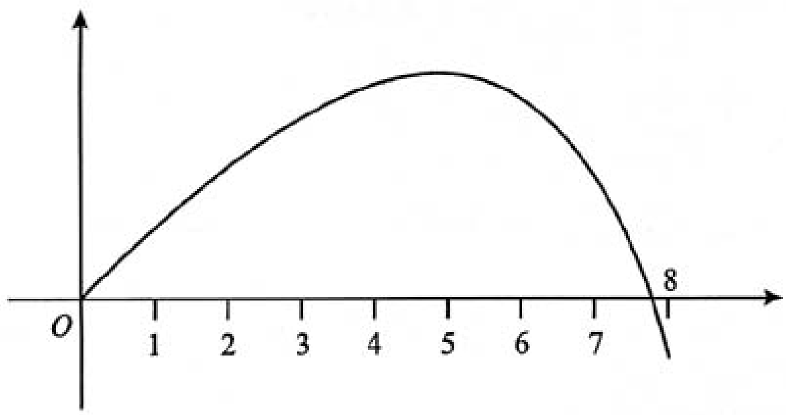
No momento em que a bola foi pontapeada, a altura a que esta se encontrava do solo era de zero metros. O mesmo se verificou no ponto onde ela caiu.

Coloquei na calculadora a expressão que é fornecida, $y_1 = 2x + 10\,ln\,(1 - 0{,}1\,x)$.

O gráfico a seguir representado foi vizualizado com a janela xmin $= -1$, xmax $= 10$, ymin $= -1$ e ymax $= 8$.

Recorrendo à calculadora, pressionei as teclas $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{calc}}$ e de seguida *zero* $\boxed{\text{enter}}$

O valor encontrado foi $x \approx 7{,}97$



$a \approx 7{,}97$

Cotação a atribuir: $3 + 3 + 8 = 14$

3.2. .... **14**

Determinar $h'(x)$ 5

Evidenciar a intenção de calcular $h'(x)$ 1

Derivada de $\ln(1 - 0{,}1\,x)$ 2

Restantes cálculos 2

Determinar o zero de h' 3

Escrever a equação $h'(x) = 0$ 1

Resolver a equação $h'(x) = 0$ 2

Estudo do sinal de h' e consequente conclusão, relativamente à monotonia e extremo de h (estudo que pode ser apresentado através de um quadro) 4

Primeira linha do quadro **(ver nota 1)** 1

Sinal de h' **(ver nota 2)** 2

Relação entre o sinal de h' e a monotonia de h...................... 1

$h(5) \approx 3{,}07$ **(ver nota 3)** 2

Notas:

1. A primeira linha do quadro deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

   Primeira linha correcta: indicação do zero da derivada e indicação correcta do domínio, de 0 a a (aceita-se também o valor aproximado de a, calculado na alínea anterior) 1

   Outras situações 0

2. A segunda linha do quadro deverá ser cotada de acordo com o seguinte critério:

   Segunda linha do quadro de acordo com a primeira linha e com a expressão obtida para $h'(x)$ 2

   Outras situações 0

3. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às centésimas, ou se o arredondamento estiver incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$h'(x) = 2 - 10\,\frac{0{,}1}{1-0{,}1\,x} = 2 - \frac{1}{1-0{,}1\,x} \qquad D_{h'(x)} = \mathbb{R}^+$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{1-0{,}1\,x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-0{,}1\,x} = 2 \Leftrightarrow 1 - 0{,}1\,x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}1\,x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

	0		5		$+\infty$
$h'(x)$	$h'(0)$	$+$	0	$-$	$-$
$h(x)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	$\searrow$

$h(5) \approx 3{,}07$

A maior altura que a bola atinge é $3{,}07$ metros, a 5 metros do local onde foi pontapeada.

Cotação a atribuir: $5(1+2+2) + 3(1+2) + 1(0^{(*)} + 0^{(**)} + 1) + 2 + (-1)^{(***)} = 10$

(*) Ver nota 1.

(**) Não é verdade que, para qualquer x pertencente ao intervalo $]5, +\infty[$, $2 - \frac{1}{1-0{,}1\,x} < 0$ (ver nota 2).

(***) O quadro apresentado pelo examinando contém uma coluna relativa ao símbolo $+\infty$, o que é inequivocamente incorrecto, do ponto de vista formal (ver critério geral 6).

Exemplo 2

$$h'(x) = 2 + 10\left(\frac{(1-0{,}1\,x)'}{1-0{,}1\,x}\right) = 2 + 10\,\frac{-0{,}1}{1-0{,}1\,x} = 2 - \frac{1}{1-0{,}1\,x} =$$

$$= \frac{2(1-0{,}1\,x)-1}{1-0{,}1\,x} = \frac{2-0{,}2\,x-1}{1-0{,}1\,x} = \frac{-0{,}2\,x+1}{1-0{,}1\,x}$$

$$-0{,}2\,x + 1 = 0 \;\wedge\; 1 - 0{,}1\,x \neq 0 \qquad\qquad x = 5 \;\wedge\; x \neq 10$$

		5	
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$

Cotação a atribuir: $5(1+2+2) + 3(1+2) + 1(0^{(*)} + 0^{(**)} + 1) + 0 = 9$

(*) Ver nota 1.

(**) Não é verdade que, para qualquer $x > 5$, se tenha $\frac{-0{,}2\,x+1}{1-0{,}1\,x} < 0$ (ver nota 2).

Exemplo 3

$h(x) = 2\,x + 10\ln(1 - 0{,}1\,x)$

Máximo = ?

$$h'(x) = [2\,x + 10\ln(1 - 0{,}1\,x)]' = (2\,x)' + (10\ln(1 - 0{,}1\,x))' =$$

$$= 2 + \left[\underbrace{10'}_{0} \times \ln(1 - 0{,}1\,x) + 10 \times (\ln(1 - 0{,}1\,x))'\right] =$$

$$= 2 + 10 \times [\ln(1 - 0{,}1\,x)]' = 2 + 10 \times \frac{(1-0{,}1\,x)'}{1-0{,}1\,x} =$$

$$= 2 + 10 \times \frac{-0{,}1}{1-0{,}1\,x} = 2 - \frac{1}{1-0{,}1\,x} = \frac{2\,(1-0{,}1\,x) - 1}{1-0{,}1\,x} =$$

$$= \frac{2 - 0{,}2\,x - 1}{1-0{,}1\,x} = \frac{1 - 0{,}2\,x}{1-0{,}1\,x}$$

$$\frac{1 - 0{,}2\,x}{1-0{,}1\,x} = 0 \Leftrightarrow 1 - 0{,}2\,x = 0 \ \wedge \ 1 - 0{,}1\,x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}2\,x = -1 \ \wedge \ -0{,}1\,x \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \ \wedge \ x \neq 10$$

	$-\infty$	5		10	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\times$	$\nearrow$

Máximo:

$$h(5) = 2 \times 5 + 10\ln(1 - 0{,}1 \times 5) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h(5) = 10 + 10\ln(1 - 0{,}5) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h(5) = 10 + 10\ln(0{,}5)$$
$$h(5) \approx 3{,}07$$

Cotação a atribuir: $5(1+2+2) + 3(1+2) + 3(0^{(*)} + 2^{(**)} + 1) + 2 = 13$

(*) Ver nota 1.

(**) Ver nota 2.

Exemplo 4

$h(x) = 2\,x + 10 \ln(1 - 0{,}1\,x)$

Máximo da bola:

$$(2\,x + 10\ln(1-0{,}1\,x))' = (2\,x)' + (10\ln(1-0{,}1\,x))' =$$

$$= 2 + (10)' . \ln(1-0{,}1\,x) + (\ln(1-0{,}1\,x))' . 10 =$$

$$= 2 + 0 + \frac{(1-0{,}1\,x)'}{1-0{,}1\,x} \cdot 10 = 2 + \frac{-0{,}1}{1-0{,}1\,x} \cdot 10 =$$

$$= 2 - \frac{0{,}1}{1-0{,}1\,x} \cdot 10 = 20 - \frac{0{,}1}{1-0{,}1\,x}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - \frac{0{,}1}{1-0{,}1\,x} = 0 \Leftrightarrow \frac{20\,(1-0{,}1\,x) - 0{,}1}{1-0{,}1\,x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{20 - 2\,x - 0{,}1}{1-0{,}1\,x} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2\,x + 19{,}9}{1-0{,}1\,x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 19{,}9 = 0 \;\wedge\; 1 - 0{,}1\,x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x = -19{,}9 \;\wedge\; x \neq 0{,}1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 9{,}95 \;\wedge\; x \neq 0{,}1$$

	$-\infty$	9,95	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$
$h'(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$

Tem um máximo para $x = 9{,}95$

Cotação a atribuir: $4(1+2+1) + 2(1+1^{(*)}) + 0(0^{(**)} + 0^{(***)} + 0^{(***)}) + 0 = 6$

(*) Erro na resolução da condição $1 - 0{,}1\,x \neq 0$

(**) Ver nota 1.

(***) O examinando troca h com h'

Exemplo 5

$h'(x) = 2 + \frac{-0,1}{1-0,1\,x}$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & & 5 & & 8 \\ \hline
h'(x) & + & 0 & - & \\ \hline
h(x) & \nearrow & Max & \searrow & 0
\end{array}$$

$h(5) = 2 \times 5 + 10 \ln (1 - 0{,}1 \times 5)$
$h(5) = 10 + 10 \ln (0{,}5)$
$h(5) = 10 - 6{,}93$
$h(5) = 3{,}07$

Cotação a atribuir: $4(1 + 2 + 1^{(*)}) + 0^{(**)} + 0^{(***)} + 0^{(****)} = 4$

(*) A fracção não está multiplicada por 10

(**) O examinando não resolveu a condição $h'(x) = 0$

(***) Quadro fora de contexto, dado que o examinando não resolveu a condição $h'(x) = 0$.
Aliás, o valor 5 não anula a expressão que o examinando obteve para $h'(x)$. Ver critério geral 8.

(****) Ver critério geral 8.

Exemplo 6

$h(4) = 2 \times 4 + 10 \ln (1 - 0{,}1 \times 4) = 2{,}89$

$h(5) = 2 \times 5 + 10 \ln (1 - 0{,}1 \times 5) = 3{,}07$

$h(6) = 2 \times 6 + 10 \ln (1 - 0{,}1 \times 6) = 2{,}84$

Depois de pontapeada, a bola atinge 3,07 metros (altura máxima) quando está a 5 metros de distância (no plano) do jogador.

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) O cálculo de $h(5)$ está descontextualizado. Ver critério geral 8.

Exemplo 7

Fui à calculadora e vi que a função tem máximo igual a $3{,}07$ para $x = 5$.

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Ver critério geral 7.

3.3. .... **14**

Taxa de variação média de h no intervalo $[1, 3]$
igual a $\frac{h(3)-h(1)}{3-1}$ (ou equivalente) 2

$h(3) = 6 + 10 \ln (0{,}7)$ 1

$h(1) = 2 + 10 \ln (0{,}9)$ 1

Utilização correcta das propriedades dos logaritmos 8

Logaritmo de um quociente 2

Logaritmo de uma potência 2

Logaritmo de um produto 2

$2 = \ln e^2$ **(ver nota)**.. 2

Restantes cálculos 2

Nota:
Esta etapa deve ser explicitada. Se o não for, não deverá ser atribuída a respectiva cotação.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$t.v.m. = \frac{h(1)-h(3)}{1-3}$$

$$h(1) = 2 + 10 \ln (0{,}9) = 0{,}95$$

$$h(3) = 6 + 10 \ln (0{,}7) = 2{,}43$$

$$t.v.m. = \frac{0{,}95-2{,}43}{1-3} = 0{,}74 = \ln \left[e^2 \left(\frac{7}{9} \right)^5 \right]$$

Cotação a atribuir: $2 + 1 + 1 + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 4$
(*) Ver critério geral 7.

Exemplo 2

$$TmV = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1}$$

$$h(3) = 6 + 10\ln(0{,}7) = 6 + 10\ln\left(\frac{7}{10}\right)$$

$$h(1) = 2 + 10\ln(0{,}9) = 2 + 10\ln\left(\frac{9}{10}\right)$$

$$TmV = \frac{6+10\ln\left(\frac{7}{10}\right) - 2 + 10\ln\left(\frac{9}{10}\right)}{2} =$$

$$= \frac{4+10\ln\left(\frac{7}{10}\right)+10\ln\left(\frac{9}{10}\right)}{2} = 2 + 5\ln\left(\frac{7}{10}\right) + 5\ln\left(\frac{9}{10}\right) =$$

$$= 2 + \ln\left(\frac{7}{10}\right)^5 + \ln\left(\frac{9}{10}\right)^5 = \ln e^2 + \ln\left(\frac{7}{10}\times\frac{9}{10}\right)^5 = \ln\left[e^2\left(\frac{63}{100}\right)^5\right]$$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 1 + 1 + 6(0+2+2+2) + 1^{(**)} = 11$

(*) Não se penalizou a troca de h por f.

(**) O examinando comete um erro de sinal. Os restantes cálculos estão correctos.

Exemplo 3

$$tvm_{[1,3]} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3)-h(1)}{3-1} = \lim_{h\to 0}\frac{6+10\ln 0{,}7 - (2+10\ln 0{,}1)}{2} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6+10\ln 0{,}7 - 2 - 10\ln 0{,}1}{2} = \lim_{h\to 0}\frac{4+10\ln 0{,}7 - 10\ln 0{,}1}{2} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4+10(\ln 0{,}7 - \ln 0{,}1)}{2} = \lim_{h\to 0}\frac{4+10\ln\left(\frac{0{,}7}{0{,}1}\right)}{2} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4+10\ln 7}{2} = \lim_{h\to 0}(2 + 5\ln 7) = \lim_{h\to 0}(\ln e^2 + \ln 7^5) =$$

$$= \ln(e^2 \times 7^5)$$

Cotação a atribuir: $0 + 1 + 0 + 8(2+2+2+2) + 2 = 11$

4.1. .... **14**

O examinando deve referir os seguintes pontos

1. $f'(x) = \cos x$
2. O declive da recta r é igual a $f'(a)$ e o declive da recta s é igual a $f'(b)$
3. Como $b = 2\pi - a$, tem-se que $\cos a = \cos b$
4. Se duas rectas têm o mesmo declive, então são paralelas.

A cotação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

O examinando refere os quatro pontos de uma forma clara, encadeada e totalmente correcta, do ponto de vista formal, concluindo assim o pretendido 14

O examinando refere os quatro pontos, mas não o faz de uma forma clara, encadeada e totalmente correcta **(ver nota)** .... 10 a 13

O examinando refere apenas três pontos, não podendo, portanto, concluir o pretendido **(ver nota)** .... 7 a 9

O examinando refere apenas dois pontos, não podendo, portanto, concluir o pretendido **(ver nota)** .... 4 a 6

O examinando refere apenas um ponto, não podendo, portanto, concluir o pretendido **(ver nota)** .... 1 a 3

Nota:
A opção por um dos valores indicados deve ter em conta:
- a existência de erros formais de escrita;
- a existência de afirmações incorrectas.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

r e s são paralelas se tiverem o mesmo declive.

Ora, sendo verdadeira a igualdade $f'(a) = f'(b)$, as rectas têm o mesmo declive

$f'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$

$f'(a) = f'(b) \Leftrightarrow \cos a = \cos b \Leftrightarrow \cos a = \cos(2\pi - a)$, o que é verdade

Cotação a atribuir: 14

Exemplo 2

Se $f'(a) = f'(b)$, então as rectas são paralelas $\qquad a + b = 2\pi \Leftrightarrow a = 2\pi - b$

$f'(a) = f'(b) \Leftrightarrow \cos(2\pi - b) = \cos(b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(-b) = \cos(b) \Leftrightarrow \cos(b) = \cos(b)$ função par

Cotação a atribuir: 13(*)

(*) O examinando refere os quatro pontos, mas não o faz de uma forma completamente clara, dado que alguns dos pontos estão implícitos.

Exemplo 3

$a+b=2\pi \qquad a+(2\pi-a)$

O declive das rectas tg ao ponto é dado por

$f'(x)=\cos x$

$\cos a=\cos(2\pi-a)$ $\longrightarrow$ são paralelas, pois têm derivadas no ponto $=$ s

Cotação a atribuir: $11^{(*)}$

(*) O examinando refere os quatro pontos, mas não o faz de uma forma completamente clara, dado que alguns dos pontos estão implícitos. A resposta contém erros formais de escrita, mas não tem afirmações incorrectas.

Exemplo 4

r e s são paralelas, se tiverem o mesmo declive, ou seja, $f'(a)=f'(b)$

$f'(x)=\cos x \qquad \cos a=\cos b$

Se $a+b=2\pi$

$\cos a+\cos b=\cos(2\pi) \qquad \cos a+\cos b=1$

Cotação a atribuir: $7^{(*)}$

(*) O examinando refere três pontos (os pontos 1, 2 e 4). Na tentativa de contemplar o ponto 3, o examinando comete um erro grave.

Exemplo 5

As rectas são // quando o m é igual.

$f(a)=\operatorname{sen} a \qquad f(b)=\operatorname{sen} b \qquad f'(x)=\cos x$

Cotação a atribuir: $5^{(*)}$

(*) O examinando refere dois pontos (os pontos 1 e 4). A primeira frase contém simplificaçãoes de escrita que devem ser consideradas erros formais, mas não tem afirmações incorrectas.

Exemplo 6

Se $a+b=2\pi$ e 2π é o período da função $\operatorname{sen} x$,

então a ordenada do ponto B é simétrica à do ponto A.

Como A está no primeiro quadrante e B no quarto, tem-se:

$P_1=(a,y) \qquad P_2=(b,-y)$

$a+b=2\pi \Leftrightarrow a=2\pi-b \Leftrightarrow a=-a$

$P_1=(a,y) \qquad P_2=(-a,-y)$

$Declive=\frac{y}{x}$

$m_r=\frac{y}{a} \qquad m_s=\frac{-y}{-a}=\frac{y}{a}$

Assim, o declive das duas rectas é igual, logo são paralelas.

Cotação a atribuir: $1^{(*)}$

(*) O examinando refere um ponto (o ponto 4). A resposta contém erros graves.

4.2. .... **14**

$\lim_{x \to 0} g(x) = 1$ 2

Concluir que a recta de equação $x = 0$ não é assimptota do gráfico de g 2

$\lim_{x \to 2\pi} g(x) = -\infty$ 2

Concluir que a recta de equação $x = 2\pi$ é assimptota do gráfico de g 2

$\lim_{x \to \pi^+} g(x) = -\infty$ e/ou $\lim_{x \to \pi^-} g(x) = +\infty$ **(ver nota 1)**........................2

Concluir que a recta de equação $x = \pi$ é assimptota do gráfico de g 2

Justificar a não existência de outras assimptotas verticais 1

Justificar a não existência de assimptotas não verticais **(ver nota 2)** 1

Notas

1. Se o examinando calcular os dois limites, os 2 pontos atribuídos a esta etapa devem ser subdivididos em 1+1.

2. Se o examinando tentar estudar a existência de assimptotas não verticais, para além de não lhe dever ser atribuído o ponto relativo a esta etapa, deve ainda ser penalizado em 2 pontos, na cotação final a atribuir a esta questão. Se, por aplicação desta norma, esta cotação final resultar negativa, deve ser convertida em 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$\lim_{x \to \pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = +\infty$ a recta de equação $x = \pi$ é assimptota do gráfico de g

$\lim_{x \to 2\pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$ a recta de equação $x = 2\pi$ é assimptota do gráfico de g

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$ não existe assimptota vertical em $x = 0$

Como g é contínua em todo o seu domínio, não existem mais assimptotas verticais.

Cotação a atribuir: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 0 = 13$

Exemplo 2

Assimptotas verticais:

$$\lim_{x\to\pi^-} g(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = +\infty \qquad \lim_{x\to\pi^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \qquad \lim_{x\to 2\pi} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

Assimptotas não verticais:

$$m = \frac{\frac{x}{\operatorname{sen} x}}{x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$ $g(x)$ não tem assimptotas não verticais

A função $g(x)$ tem como assimptotas as rectas $x = \pi$ e $x = 2\pi$

Cotação a atribuir: $2 + 2^{(*)} + 2 + 2 + 2 + 2 + 0 + 0 + (-2)^{(**)} = 10$

(*) A conclusão de que a recta de equação $x = 0$ não é assimptota do gráfico de g está implícita na conclusão final do examinando.

(**) Ver nota 2.

Exemplo 3

$\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \qquad D_g = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to\pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$$

$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ é assimptota vertical da função g

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{\operatorname{sen} x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$ não admite limite

Não existem assimptotas não verticais

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0 + 0 + 2 + 0 + 0 + 0 + (-2)^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 4

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi^+}{\operatorname{sen} \pi^+} = \frac{\pi^+}{0} = -\infty \qquad \lim_{x\to\pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi^-}{\operatorname{sen} \pi^-} = \frac{\pi^-}{0} = +\infty$$

A recta de equação $x = \pi$ é uma assimptota vertical

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0 + 0 + 1^{(*)} + 2 + 0 + 0 = 3$

(*) Penalizou-se em 1 ponto a não indicação dos sinais dos denominadores, na última fracção de cada um dos limites.

Exemplo 5

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi}{0} = \pm\infty \qquad x = \pi \text{ é assimptota vertical}$$

Cotação a atribuir: $0+0+0+0+1+2+0+0=3$

Exemplo 6

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi}{0} = \infty \qquad \text{Há assimptota vertical para } x = \pi$$

Assimptotas não verticais: não há pois o domínio é um intervalo limitado, pelo que x não tende, nem para $+\infty$, nem para $-\infty$.

Cotação a atribuir: $0+0+0+0+2+2+0+1=5$

Exemplo 7

Assimptotas verticais: uma $x=\pi$ pois $]0,2\pi[\backslash\{\pi\}$

Assimptotas não verticais:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{0^+}{\operatorname{sen} 0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2\pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{2\pi}{\operatorname{sen} 2\pi^-} = \frac{2\pi}{0^-} = -\infty$$

Cotação a atribuir: $0+0+2+0+0+0+0+0+(-2)^{(*)}=0$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 8

π não pertence ao domínio de g, mas é um ponto de acumulação e, por isso, candidato a assimptota vertical.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pi^-} g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\pi^-}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\pi^+} g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\pi}{0} = -\infty \end{array}\right\} \quad x=\pi \text{ é assimptota vertical de } g$$

$$\lim_{x\to 2\pi} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \lim_{x\to 2\pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{2\pi}{0^-} = -\infty \qquad 2\pi \text{ é também assimptota de } g$$

Cotação a atribuir: $0+0+2+2+1+2+0+0+(-1)^{(*)}=6$

(*) O examinando escreve expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal: utiliza o símbolo de equivalência em vez do de igualdade e escreve «2π *é também assimptota de* g», em vez de «*a recta de equação* $x=2\pi$ *é também assimptota do gráfico de* g» (ver critério geral 6).

5. .... **14**

Conteúdo **(ver notas 1, 2 e 3)** 12

Forma **(ver nota 4)** 2

Notas:

1. Os motivos de rejeição das opções incorrectas são os seguintes:

Opção A: a imagem de 0 é 500, e não 400.

Opção C: o limite da função, quando $t \to +\infty$, é 1200, e não 1000
ou
nesta função, o valor 1000 é ultrapassado (esta afirmação deve ser devidamente sustentada, por exemplo através da reprodução do gráfico obtido na calculadora).

Opção D: a função não é monótona (esta afirmação deve ser devidamente sustentada, por exemplo através da reprodução do gráfico obtido na calculadora), o que contraria a situação que se pretende modelar (o número de lobos cresce continuamente).

2. A explicação do motivo pelo qual é rejeitada cada uma das opções erradas vale 4 pontos, a serem atribuídos de acordo com o seguinte critério:

O motivo apresentado é correcto e está devidamente fundamentado 4

O motivo apresentado é correcto, mas a sua fundamentação está incompleta ou contém imperfeições 3

O motivo apresentado é correcto, mas a sua fundamentação está errada ou não existe 2

O motivo apresentado não é correcto 0

3. Não deverá ser valorizada qualquer explicação sobre as razões pelas quais a opção B está de acordo com a situação a modelar, dado que tal não é pedido no enunciado.

4. Quanto à forma, a composição deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia) 2

Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade 1

Ausência de composição ou redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade 0

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

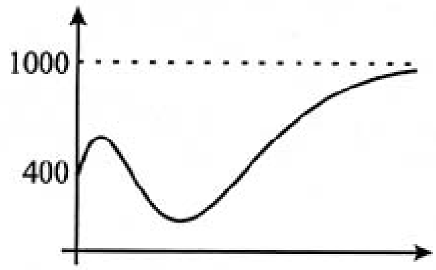
Exemplo 1

A opção A está incorrecta, dado que não está de acordo com o facto de existirem quatrocentos lobos no parque natural, no instante $t = 0$, correspondente ao início do ano de 1972. Na realidade, nesta opção, a imagem de 0 é 500.

O facto de os recursos do parque permitirem que o número de lobos cresça continuamente até bastante perto de um milhar implica que se tenha $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 1000$. Por isso, a opção C também não está correcta, dado que $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1200}{1+2e^{-t}} = 1200$.

A opção D está igualmente incorrecta, dado que, como o gráfico reproduzido ao lado evidencia, a função definida pela expressão $1000 - \frac{600(t^3+1)}{e^t}$ não é monótona.

Tal não está de acordo com a afirmação de que o número de lobos cresce continuamente.

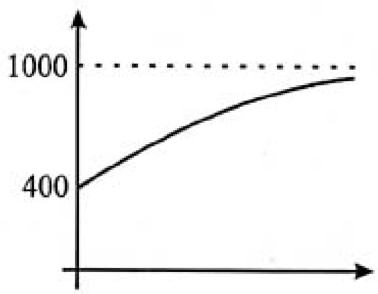


Portanto, a opção correcta é a opção B.

Cotação a atribuir: $12(4 + 4 + 4) + 2 = 14$

Exemplo 2

A resposta é a B porque a A começa nas 500 unidades e no problema diz que se inicia com 400 unidades. A C não pode ser pois a função vai tender para 1200 e não para 1000 como é pedido. E a D não pode ser pois no início tem umas oscilações aumenta depois diminui e volta a aumentar e no problema diz que a população de lobos está sempre a crescer. Então fica a B que é a única que respeita as condições, começa nos 400 e tende para 1000.



Cotação a atribuir: $11(4 + 4 + 3^{(*)}) + 1 = 12$

(*) O motivo pelo qual o examinando rejeita a opção D não está completamente fundamentado, dado que o examinando não apresenta qualquer gráfico (nem nenhum argumento) que sustente as afirmações feitas (ver notas 1 e 2). Note-se que, sendo evidente a utilização da calculadora gráfica por parte do examinando, este não respeitou a indicação, expressa no enunciado, de que deveria reproduzir o gráfico obtido.

Exemplo 3

A função A não pode ser pois $P(0) = \frac{1000}{1+e^0} = \frac{1000}{2} = 500$ lobos no início, logo está mal.

A função C não poderá ser pois $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1200}{1+2e^{-t}} = 1200 \rightarrow$ nº máximo.

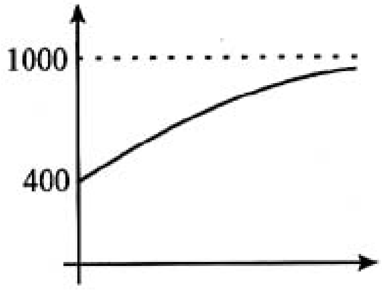
A função D

$P(0) = 400 \qquad \lim\limits_{t \to +\infty} \left(1000 - \frac{600(t^3+1)}{e^t}\right) = 1000 - \frac{+\infty}{+\infty}$ S. I.

A função B

$P(0) = \frac{1000}{1+1{,}5\, e^0} = 400$ lobos

$\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1000}{1+1{,}5\, e^{-0{,}5t}} = \frac{1000}{1} = 1000$



É o B pois não ultrapassa os 1000 lobos e no início apresenta 400.

Cotação a atribuir: $7(4 + 3^{(*)} + 0^{(**)}) + 0^{(***)} = 7$

(*) A fundamentação do motivo pelo qual o examinando rejeita a opção C está incompleta e contém uma imperfeição, de natureza formal (a escrita de $1200 \rightarrow$ nº máximo).

(**) O examinando não apresenta qualquer motivo para ter rejeitado a opção D.

(***) O examinando não apresenta qualquer composição (ver nota 4).

Exemplo 4

A resposta A não pode ser, porque para $t = 0$, $\frac{1000}{1+e^{-0{,}5t}} = 500$, enquanto que no instante inicial da contagem, haviam 400 lobos.

A resposta C não pode ser, porque quando $t \rightarrow +\infty$, a função acaba em 1200, quando deveria acabar em 1000.

A resposta D não pode ser, porque quando $t \rightarrow +\infty$, a função tende para $+\infty$, logo excede os 1000 lobos.

Cotação a atribuir: $7(4 + 3^{(*)} + 0^{(**)}) + 1 = 8$

(*) A fundamentação do motivo pelo qual o examinando rejeita a opção C contém erros de linguagem matemática (*a função acaba em ... , deveria acabar em ...*).

(**) O motivo pelo qual o examinando rejeita a opção D está errado.

Código Confidencial da Escola	Número Convencional da Prova	Versão	Grupo I								Grupo II												TOTAL da PROVA (200)
			1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		1.1.	1.2.	2.1.1.	2.1.2.	2.2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.1.	4.2.	5.		
			(9)	(9)	(9)	(9)	(9)	(9)	(9)	T1 (63)	(12)	(9)	(8)	(10)	(14)	(14)	(14)	(14)	(14)	(14)	(14)	T2 (137)	

Data ____/____/____

O Professor Classificador ____________________

GRELHA DE CLASSIFICAÇÃO