PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA

(PROVA 435) 2ªFASE

Grupo I

Questão	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	D	D	A	C	B	B	A
Versão 2	B	D	B	A	A	D	B

Grupo II

1.

1.1.

$$\frac{w_1 \times w_2 - 2}{w_3} = \frac{\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{12}\right)-2}{\sqrt{3}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2cis\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)-2}{\sqrt{3}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2cis\left(\frac{\pi}{3}\right)-2}{\sqrt{3}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1+\sqrt{3}i-2}{\sqrt{3}(-i)} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i}\times\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{-\sqrt{3}i+3i^2}{3} = \frac{-3-\sqrt{3}i}{3} = -1-\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

Cálculos Auxiliares:

$$w_1 = 1+i = \sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$2cis\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,sen\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1+\sqrt{3}i$$

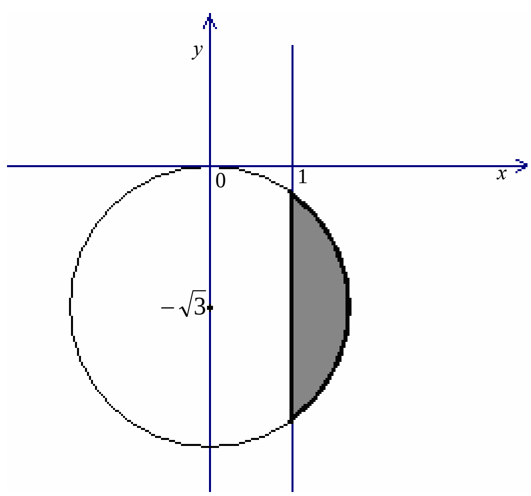
1.2.

$\mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Re}(w_1) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

(semi-plano fechado limitado pela recta de equação $x = 1$)

$|z - w_3| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + \left(y+\sqrt{3}\right)^2 \leq 3$

(círculo de centro $(0, -\sqrt{3})$ e raio $\sqrt{3}$)



2.

2.1.

2.1.1. O número de conjuntos diferentes que o João pode formar é dado pela expressão:

$$6 \times 4 \times 3 \times 1 = 72$$

2.1.2. O número de conjuntos diferentes que o João pode formar é dado pela expressão:

$$^{6}C_4 + {}^{4}C_4 = 15 + 1 = 16$$

2.2. X:"número de discos italianos seleccionados"

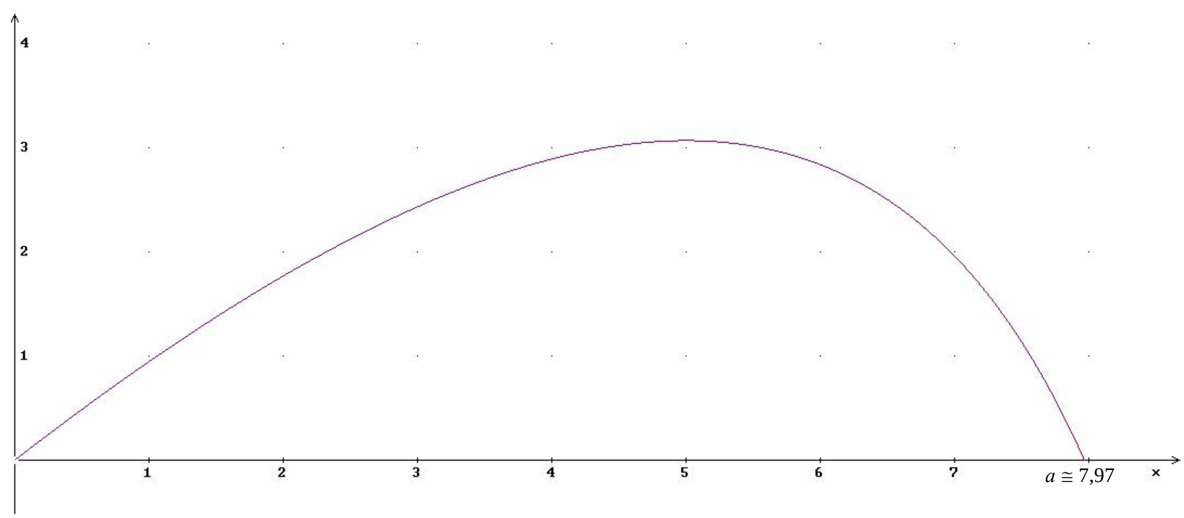
x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{^{13}C_4}{^{14}C_4}$	$\frac{^{13}C_3}{^{14}C_4}$

ou seja

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

3.

3.1. No momento em que a bola atinge o solo a sua altura relativamente a este é de zero metros, logo o valor de a é um dos zeros da função. Colocando, na calculadora a expressão da função dada e tendo em atenção a janela de visualização Xmin:0, Xmax:9, Ymin:0 e Ymax:4 obtém-se a representação gráfica da função. Recorrendo à ferramenta de cálculo do zero da função obteve-se o valor de a.



3.2.

$h(x) = 2x + 10\ln(1 - 0{,}1x)$

$h'(x) = \left[2x + 10\ln(1 - 0{,}1x)\right]' = 2 + 10\left(\dfrac{-0{,}1}{1 - 0{,}1x}\right) = 2 - \dfrac{1}{1 - 0{,}1x}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \dfrac{1}{1 - 0{,}1x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2 - 0{,}2x - 1}{1 - 0{,}1x} = 0 \Leftrightarrow 1 - 0{,}2x = 0 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow x = 5$

x	**0**		**5**		***a***
h'		+	**0**	-	
h	**0**	↗	**máx**	↘	**0**

$h(5) = 2 \times 5 + 10\ln\left(1 - 0{,}1 \times 5\right) \cong 3{,}07$

A altura máxima atingida pela bola, relativamente ao solo, depois de pontapeada é, aproximadamente, 3,07 metros.

3.3. $tvm_{[1,3]} = \dfrac{h(3) - h(1)}{3 - 1} = \dfrac{6 + 10\ln(0{,}7) - 2 - 10\ln(0{,}9)}{2} = 2 + 5\ln\left(\dfrac{0{,}7}{0{,}9}\right) = 2 + 5\ln\left(\dfrac{7}{9}\right)$

e

$\ln\left[e^2\left(\dfrac{7}{9}\right)^5\right] = \ln\left(e^2\right) + \ln\left[\left(\dfrac{7}{9}\right)^5\right] = 2 + 5\ln\left(\dfrac{7}{9}\right) = tvm_{[1,3]}$

4.

4.1. $f(x) = sen\, x \wedge x \in \left[0, 2\pi\right]$

$m_r = f'\left(a\right) = \cos a$

$m_s = f'\left(b\right) = \cos b$

Sabendo que $a + b = 2\pi$ tem-se $b = 2\pi - a$.

Então, $m_s = \cos b = \cos\left(2\pi - a\right) = \cos\left(-a\right) = \cos a = m_r$

Assim, porque *r* e *s* têm o mesmo declive, as rectas são paralelas.

4.2. $g(x)=\dfrac{x}{f(x)}$ e $D_g=\left]0,\pi\right[\cup\left]\pi,2\pi\right[$.

Uma vez que o domínio é um conjunto limitado, a função não tem assimptotas não verticais.

Como o domínio é uma união de dois intervalos abertos estudemos a existência de assimptotas verticais (A.V.) em $x=0$, $x=\pi$ e $x=2\pi$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{senx}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{senx}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$, logo a recta de equação $x=0$ não é A.V.

$\lim\limits_{x\to 2\pi^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2\pi^-}\dfrac{x}{senx}=\dfrac{2\pi}{0^-}=-\infty$, logo a recta de equação $x=2\pi$ é A.V

$\lim\limits_{x\to \pi^+} g(x)=\dfrac{\pi}{0^-}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to \pi^-} g(x)=\dfrac{\pi}{0^+}=+\infty$, pelo que a recta de equação $x=\pi$ é A.V.

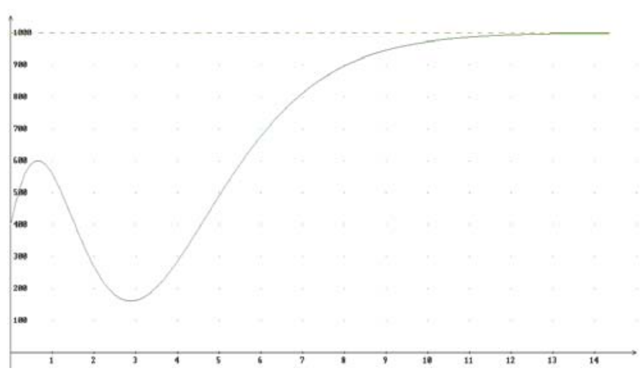
A função g é contínua em todo o seu domínio, logo não existem outras assimptotas verticais.

5. A expressão correcta é a B.

Rejeita-se A dado que o número de lobos no início de 1972 é igual a 400 e $\dfrac{1000}{1+e^{-0,5\times 0}}=500$.

Rejeita-se C porque os recursos do parque permitem que o número de lobos cresça até bastante perto de um milhar, mas não permitem que este valor seja ultrapassado, e $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1200}{1+2e^{-t}}=1200$.

Rejeita-se D porque, apesar de verificar a condição inicial, de 400 lobos em 1972, a função definida pela expressão dada nesta hipótese não é estritamente crescente como se pode observar pelo gráfico.



Esta proposta de resolução também pode ser consultada em http://www.apm.pt