PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA (PROVAS 435 e 635) 1ªFASE

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	C	C	C	C	B	D
Versão 2	D	A	B	B	B	A	B

Grupo II

1.1.

$$\frac{4+2i\left(cis\frac{\pi}{6}\right)^6}{3+i}=\frac{4+2i\left(cis\frac{6\pi}{6}\right)}{3+i}=\frac{4+2i\,(cis\pi)}{3+i}=\frac{4+2i\times(-1)}{3+i}=$$

$$=\frac{4-2i}{3+i}=\frac{4-2i}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}=\frac{12-4i-6i+2i^2}{9-i^2}=\frac{12-10i-2}{9+1}=\frac{10-10i}{10}=1-i$$

$$|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

Seja $\theta=\arg(1-i)$

$\tan(\theta)=\frac{-1}{1}=-1 \quad \wedge\ \theta\in 4^{o}Q$, então $\theta=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in Z$

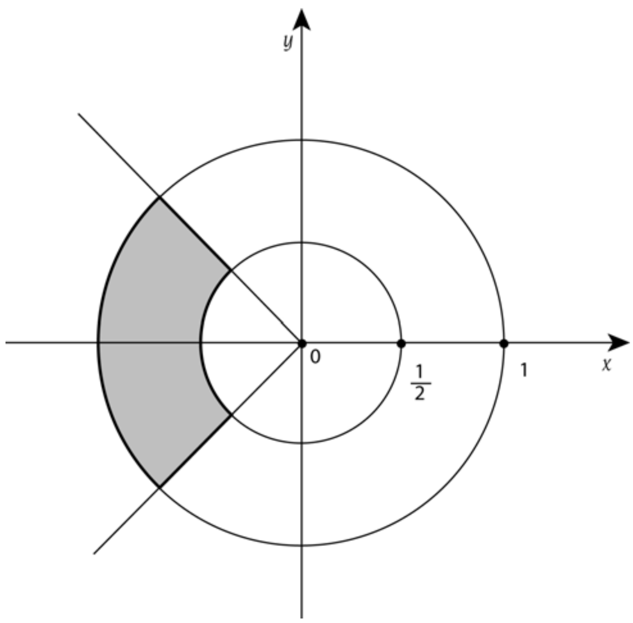
Logo, duas respostas possíveis são $1-i=\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ou $1-i=\sqrt{2}cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

1.2.

$$A_{\text{circulo de raio 1}}=\pi\times 1^2=\pi$$

$$A_{\text{circulo de raio 1/2}}=\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}$$

$$A_{\text{sombreadea}}=\frac{\pi-\frac{\pi}{4}}{4}=\frac{\frac{3\pi}{4}}{4}=\frac{3\pi}{16}$$



2.1. $5\times 4\times 3=60$

R: As restantes cinco faces podem ser pintadas de 60 maneiras diferentes.

2.2. $P=\dfrac{6}{{}^{12}C_2}=\dfrac{6}{66}=\dfrac{1}{11}$

3.1.

$P(B|A)$ representa, neste contexto, a probabilidade da segunda bola extraída ser branca sabendo que a primeira bola extraída foi preta.

Sendo $P(B|A)=\dfrac{1}{2}$ então, na segunda extracção, existe igual número de bolas brancas e pretas na caixa.

Como na primeira extracção foi retirada uma bola preta, e não há reposição, estando inicialmente dez bolas brancas na caixa, então o número inicial de bolas pretas é onze.

4.1.

$\overline{OQ}=2x$ porque a abcissa de P é x e o triângulo [OPQ] é isósceles.

A altura do triângulo [OPQ] é e^{-x} pois corresponde à ordenada do ponto P.

$$A(x)=\frac{2x\times e^{-x}}{2}=x\,e^{-x}$$

4.2.

$$A'(x)=1\times e^{-x}-x\,e^{-x}=e^{-x}\,(1-x)$$
$$A'(x)=0\Leftrightarrow e^{-x}\,(1-x)=0\Leftrightarrow e^{-x}=0\vee 1-x=0\Leftrightarrow x=1$$

x	0		1	$+\infty$
$A'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$
$A(x)$	n.d.	$\nearrow$	Max.	$\searrow$

$A(1)=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

A função é estritamente crescente no intervalo $]-\infty;1]$ e estritamente decrescente no intervalo $[1;+\infty[$.
(São igualmente aceitáveis os intervalos $]-\infty,1[$ e $]1,+\infty[$)

Tem um máximo absoluto $\dfrac{1}{e}$ para $x=1$.

O valor máximo da área do triângulo [OPQ] é $\dfrac{1}{e}$.

5.

Como a função f é contínua em IR e g está definida pelo produto de f pela função identidade, então g é contínua em IR e por isso o seu gráfico não admite assimptotas verticais.

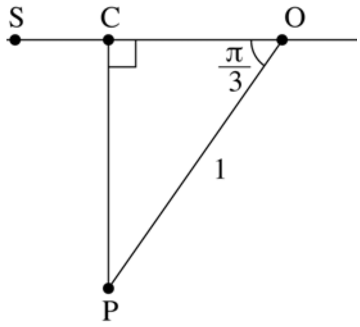
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\,f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

Como $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=-\infty$ então o gráfico de g também não admite assimptotas não verticais.

6.1.

$$\alpha(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\cos(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

No momento inicial, a distância do centro da esfera à recta OS é dada por $\overline{PC}$ sendo C a projecção ortogonal de P sobre a recta OS como está representado na figura.



$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\overline{PC}}{\overline{OP}}\Leftrightarrow\overline{PC}=\overline{OP}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\overline{PC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

6.2.

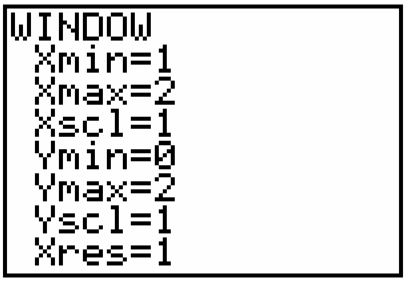
$$\alpha(t)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(\sqrt{9,8}\;t\right)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(\sqrt{9,8}\;t\right)=0\Leftrightarrow$$

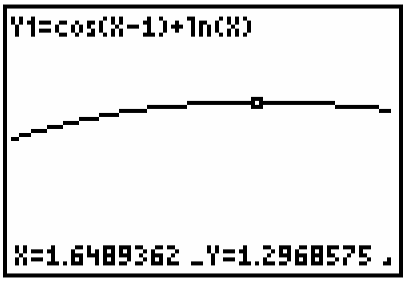
$$\Leftrightarrow\cos\left(\sqrt{9,8}\;t\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{9,8}\;t=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in Z\Leftrightarrow t=\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{\sqrt{9,8}},\quad k\in Z$$

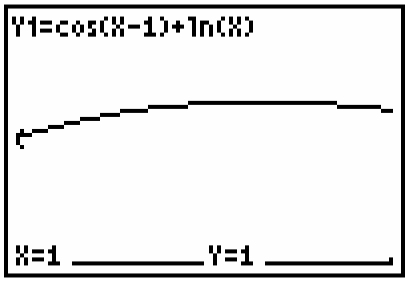
O primeiro instante em que o centro da esfera passa pela recta r corresponde à solução da equação anterior quando $k=0$.

Então $t=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{9,8}}\approx 0,5$ s

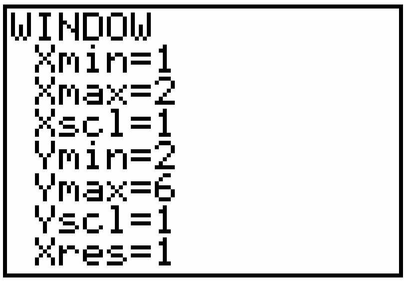
7. Recorrendo à calculadora gráfica, obteve-se o gráfico da função f no intervalo [1,2]. Depois de se determinarem os extremos absolutos da função, conclui-se que o seu contradomínio é $[1; 1{,}297]$, pois $f(1)=1$ e o valor do máximo é aproximadamente 1,297

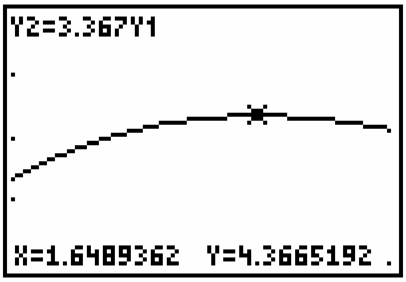






O contradomínio da função *g* deverá ser [4,5], que é um intervalo de amplitude 1.
Como o contradomínio da função *f* é $[1; 1{,}297]$, a amplitude é, aproximadamente, 0,297. Logo, o factor *a* procurado deverá ser tal que, $a \times 0{,}297 = 1$. Assim, *a*=3,367 e a função $3{,}367 \times f(x)$ terá um contradomínio com amplitude 1.





O contradomínio de $3{,}367 \times f(x)$ será então $[3{,}367; 4{,}367]$. Para que o contradomínio seja o intervalo [4,5] teremos de efectuar uma translação a $3{,}367 \times f(x)$, adicionando $b = 5 - 4{,}367 = 0{,}633$ a cada um dos extremos do intervalo.

Uma resolução alternativa, embora não seja totalmente gráfica, como pede o enunciado, usaria enquadramentos para trabalhar com os contradomínios. Depois de determinado graficamente o contradomínio de *f*, podemos escrever:

$$1 \le f(x) \le 1{,}297$$
$$\Leftrightarrow a \le a \cdot f(x) \le 1{,}297 \cdot a \quad \text{porque } a > 0$$
$$\Leftrightarrow a + b \le a \cdot f(x) + b \le 1{,}297 \cdot a + b$$
$$\Leftrightarrow a + b \le g(x) \le 1{,}297 \cdot a + b$$

Como g tem por contradomínio o intervalo [4,5] então,

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 1{,}297a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ 1{,}297a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ 1{,}297a+4-a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ 0{,}297a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a=\dfrac{1}{0{,}297} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a \approx 3{,}367 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \approx 0{,}633 \\ a \approx 3{,}367 \end{cases}$$

R: O valor de a é aproximadamente 3,37 e o valor de b aproximadamente 0,63.

FIM

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em http://www.apm.pt