PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA (PROVAS 435 e 635)
2ªFASE

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	D	A	C	A	D	A
Versão 2	B	C	A	B	D	D	C

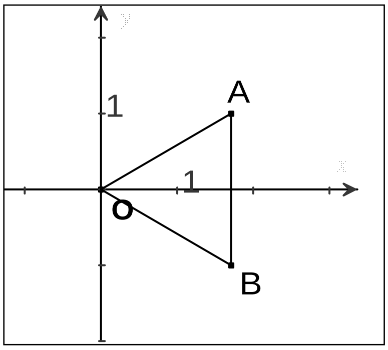
Grupo II

1.1.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(2-i)\cdot\left(2+cis\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{5}cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{(2-i)\cdot(2+i)}{\frac{1}{5}cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{4-i^2}{\frac{1}{5}cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{4+1}{\frac{1}{5}cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{5}{\frac{1}{5}cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)}=$$

$$=\frac{5cis0}{\frac{1}{5}cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{5}{\frac{1}{5}}cis\left(0+\frac{\pi}{7}\right)=25cis\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

1.2.



Tendo em conta que o triângulo [AOB] é equilátero então:

- a amplitude de cada ângulo interno mede $\frac{\pi}{3}rad$
- cada lado mede 2 visto que tem perímetro 6 e daí $\overline{OA}=2$.

Atendendo a que o afixo de $\bar{z}$ é simétrico do afixo de z em relação ao eixo Ox, então $\arg(z)=\frac{\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{6}rad$

$$z=2cis\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+i$$

Outro processo:

Tendo em conta que o triângulo [AOB] é equilátero então cada lado mede 2 visto que tem perímetro 6 e daí $\overline{OA}=2$ e $\overline{AB}=2$. A ordenada do ponto A será portanto igual a 1.
Recorrendo ao Teorema de Pitágoras para determinar a abcissa x do ponto A tem-se que:

$x^2+1^2=2^2 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ (porque A está no 1º quadrante)

As coordenadas do ponto A são então $\left(\sqrt{3},1\right)$ logo $z=\sqrt{3}+i$

2.1.

Assímptotas verticais:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x + x\ln(x-1))$.

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} x = 1 \quad e \quad \lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x-1) = -\infty,$ então $\lim\limits_{x\to 1^+}(x + x\ln(x-1)) = -\infty$

Como a função f é contínua em $]1; +\infty[$ então a recta de equação $x = 1$ é a única assímptota vertical do seu gráfico.

Assimptotas não verticais:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + x\cdot\ln(x-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x} + \frac{x\ln(x-1)}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}[1 + \ln(x-1)]$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-1) = +\infty$ concluímos que o limite pretendido é $+\infty$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ não é um número real, então o gráfico de f não admite assimptotas não verticais.

2.2.

$f(2) = 2 + 2\cdot\ln(2-1) = 2 + 0 = 2$

Então as coordenadas do ponto Q são $(2, 2)$.

$$f'(x) = 1 + \ln(x-1) + x\cdot\frac{1}{x-1} = 1 + \ln(x-1) + \frac{x}{x-1}$$

$$m = f'(2) = 1 + \ln(2-1) + \frac{2}{2-1} = 1 + 0 + 2 = 3$$

Como a recta tangente ao gráfico de f tem declive 3 então a sua equação reduzida é do tipo $y = 3x + b$.

Uma vez que o ponto Q pertence à recta r e tem coordenadas $(2, 2)$ então

$$2 = 3\times 2 + b \Leftrightarrow b = -4$$

Uma equação da recta r é $y = 3x - 4$.

Como P é o ponto de intersecção de r com o eixo Ox, a sua abcissa x verifica $0 = 3x - 4 \quad ou\ seja\ x = \dfrac{4}{3}$.

$$A_{trapézio} = \frac{\overline{RQ} + \overline{OP}}{2}\times\overline{OR} = \frac{2 + \frac{4}{3}}{2}\times 2 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

3.1.

Sendo o periélio o ponto da órbita da Terra mais próxima do Sol e passando o lado origem do ângulo x pelo periélio, então d será mínima para $x = 0$.

$$d(0) = 149{,}6 \cdot (1 - 0{,}0167 \cos 0) = 149{,}6 \cdot (1 - 0{,}0167) \approx 147{,}1$$

Atendendo à expressão analítica da função, d será máxima quando $\cos x$ for mínimo. No intervalo $[0,\, 2\pi[$, $\cos x$ é mínimo para $x = \pi$. (Também do facto da órbita ser elíptica se pode concluir que a distância máxima se obtém quando $x = \pi$).

$$d(\pi) = 149{,}6 \cdot (1 - 0{,}0167 \cos \pi) = 149{,}6 \cdot (1 + 0{,}0167) \approx 152{,}1$$

R.: As distâncias máxima e mínima da Terra ao Sol são de, aproximadamente, 152,1 e 147,1 milhões de quilómetros, respectivamente.

3.2.1.

$$x = \pi \Rightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi - 0{,}0167 \sin \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi \cdot T}{2\pi} \Leftrightarrow t = \frac{T}{2}$$ como queríamos mostrar.

O tempo que decorre desde a passagem da Terra pelo periélio até ao ponto correspondente ao ângulo π (ponto da órbita da Terra mais afastado do Sol) é metade do tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa.

3.2.2.

Entre 4 de Janeiro e 14 de Fevereiro decorreram 41 dias.

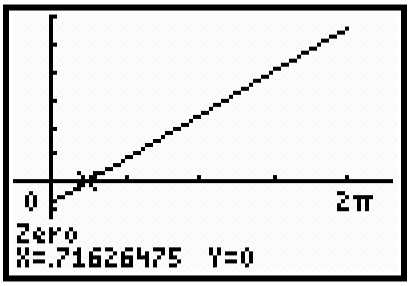
Como $t = 41$ e $T = 365{,}24$ tem-se que :

$$\frac{2\pi \times 41}{365{,}24} = x - 0{,}0167 \sin x$$

Precisamos assim de resolver a equação

$$0{,}7053 = x - 0{,}0167 \sin x,\ ou\ seja,\ x - 0{,}0167 \sin x - 0{,}7053 = 0$$

Recorrendo à calculadora gráfica para resolver a equação anterior obteve-se 0,7163 para valor aproximado de x.



$$d(0{,}7163) = 149{,}6 \cdot (1 - 0{,}0167 \cos 0{,}7163) \approx 147{,}7$$

R.: No dia 14 de Fevereiro, a distância da Terra ao Sol é de, aproximadamente, 147,7 milhões de quilómetros.

4.

Para verificar a existência de pelo menos um número real *c* no intervalo $]0,1[$, tal que $f(c) = f(c+1)$, isto é, tal que $f(c) - f(c+1) = 0$, vamos utilizar a sugestão dada e tentar provar que a função definida por $g(x) = f(x) - f(x+1)$, admite pelo menos um zero no intervalo $]0,1[$.

Ora tem-se que:

1) A função *g* é contínua no intervalo $[0,1]$ porque é definida pela diferença de funções contínuas (*f* é contínua em $[0,2]$ e portanto também em $[0,1]$)

2)

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = f(0) - f(0+1) = f(0) - f(1) = -f(1) < 0 \\ g(1) = f(1) - f(2) = f(1) - 0 = f(1) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0) \times g(1) < 0$$

Logo, pelo Teorema de Bolzano, a função *g* tem pelo menos um zero no intervalo $]0,1[$ e portanto existe pelo menos um número real *c* no intervalo $]0,1[$ tal que $f(c) = f(c+1)$.

5.1.

Para que a soma das idades dos dois alunos seja igual a 12, podemos escolher dois alunos com 6 anos ou um com 5 e outro com 7 anos. A probabilidade de tal ocorrer é:

$$\text{P} = \frac{{}^{10}C_2 + 4 \times 9}{{}^{23}C_2} = \frac{81}{253}$$

5.2.

$P(B \mid A)$ é a probabilidade de o aluno ser rapaz, sabendo que tem 7 anos. Existem 9 alunos com 7 anos, dos quais 2 são rapazes. Assim sendo, tem-se que:

$$P(B \mid A) = \frac{2}{9}$$

6.

A opção 1 rejeita-se porque $P(X \cup Y) < 1$ é falsa, uma vez que $X \cup Y$ é o acontecimento certo, e portanto $P(X \cup Y) = 1$.
A opção 2 rejeita-se porque todo o número múltiplo de 4 é par, mas nem todos os pares são múltiplos de 4 ($Y \subset X$). Assim, $P(X \cup Y) = P(X)$ e portanto $P(X \cup Y) > P(X)$ é falsa.
A opção 3 rejeita-se porque os acontecimentos *X* e *Y* são incompatíveis (não existem raparigas com 18 anos na turma), sendo portanto $P(X \cap Y) = 0$. Logo $P(X \cap Y) > 0$ é falsa.
Rejeitadas as opções 1, 2 e 3, a opção 4 é a única em que as três afirmações são verdadeiras.

FIM

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em http://www.apm.pt