ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Proposta de resolução da prova de Exame

Matemática A (635, 21 de Junho 2007)

Grupo I

	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	D	D	C	B	A	C	D
Versão 2	C	C	A	D	B	A	B

Grupo 2

1.1. Existem vários processos de resolução desta questão. Apresentamos o seguinte:

$$\overrightarrow{OA} = (\cos\alpha, sen\alpha)$$

$$\overrightarrow{OB} = (\cos\alpha, -sen\alpha)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \\ &= (\cos\alpha, sen\alpha) + (\cos\alpha, -sen\alpha) \\ &= (2\cos\alpha, 0)\end{aligned}$$

$$w = 2\cos\alpha + 0i = 2\cos\alpha$$

1.2.

$$\frac{z^3}{i} = \frac{(cis\alpha)^3}{i} = \frac{cis(3\alpha)}{cis\left(\frac{\pi}{2}\right)} = cis\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Para que o complexo dado seja um número real, terá que ser:

$$3\alpha - \frac{\pi}{2} = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$3\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

2.1. Existem vários processos de resolução desta questão. Apresentamos o seguinte:

Para os acontecimentos A e B serem independentes basta que:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \qquad (1)$$

Calculando as probabilidades:

$$P(A \cap B) = \frac{8 \times 7 \times 1}{9^3} = \frac{56}{729}$$

$$P(A) = \frac{9 \times 9 \times 1}{9^3} = \frac{1}{9}$$

$$P(B) = \frac{9 \times 8 \times 7}{9^3} = \frac{56}{81}$$

Substituindo na expressão (1), tem-se:

$$\frac{56}{729} = \frac{1}{9} \times \frac{56}{81}$$

Como esta igualdade se verifica, os acontecimentos **A** e **B** são efectivamente independentes.

2.2.

${}^{9}\boldsymbol{A}_{3}$ representa todos os números que se podem formar com três algarismos diferentes (dos 9 disponíveis).

${}^{5}\boldsymbol{A}_{3}$ representa todos os números que se podem formar com três algarismos ímpares diferentes (dos 5 ímpares possíveis).

Como o produto de três algarismos só não é par quando os três algarismos são ímpares, o número pedido é a diferença entre estes dois valores (${}^{9}\boldsymbol{A}_{3} - {}^{5}\boldsymbol{A}_{3}$).

3.

Sabe-se que:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \qquad (2)$$

Da igualdade

$$(A \cup B) \cap C = \varnothing$$

vem

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing$$

Se esta reunião é $\varnothing$**,** então $A \cap C = \varnothing$

Substituindo na expressão (2) tem-se:

$$P(A \cup C) = 0{,}21 + 0{,}47 - P(\varnothing)$$

$$P(A \cup C) = 0{,}68 - 0$$

$$P(A \cup C) = 0{,}68$$

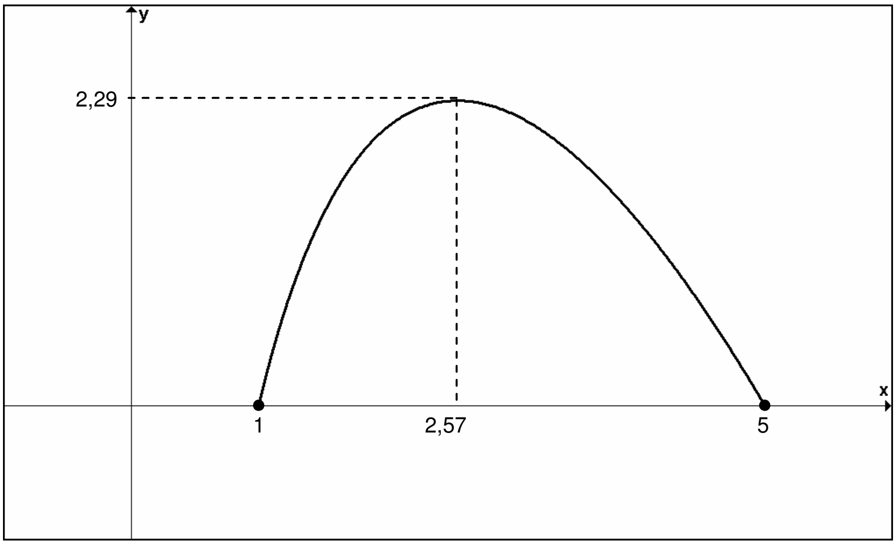
4. Sabendo que **x** é a abcissa do ponto **P**, as dimensões do rectângulo em função de **x** são:

$5 - x$ e **$\ln x$**

A expressão da área do rectângulo em função da abcissa de **P** é dada por:

$$\mathbf{A(x) = (5 - x)\ \ln x,\ 1 \leq x \leq 5}$$

Admite a seguinte representação gráfica:



O ponto de ordenada máxima tem as seguintes coordenadas (aproximadas às centésimas) **(2,57 ; 2,29)** , logo a abcissa de P (aproximada às centésimas) para a qual a área do rectângulo é máxima é **2,57.**

5.1.

$$f'(x) = e^{x-1}$$

$$g'(x) = \cos x$$

$$h(x) = e^{x-1} - \cos x$$

$$h(0) = e^{-1} - 1 \approx -0{,}632\ldots < 0$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}-1} - \cos\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}-1} \approx 1{,}770\ldots > 0$$

Como h é uma função contínua em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, pois é a diferença de duas funções contínuas, e $h(0)\times h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, por um corolário do Teorema de Bolzano existe pelo menos um zero de h em $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

5.2.

Pela questão anterior existe um valor **a** em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tal que **h(a)=0**,

ou seja **f'(a) = g'(a)**.

Como para **a** as derivadas são iguais, e como, numericamente, as derivadas são os declives das tangentes aos gráficos das funções **f** e **g**, podemos concluir que as rectas tangentes aos gráficos de **f** e **g** no ponto de abcissa **a** têm o mesmo declive, ou seja são paralelas.

6.1.

Nas condições do enunciado deve ser:

$$\mathrm{I}(20) = \frac{\mathrm{I}(0)}{2}$$

Ou seja:

$$a\ e^{-20b} = \frac{a}{2}$$

$$e^{-20b} = \frac{1}{2}$$

$$-20b = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$b = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-20} \approx 0{,}03$$

6.2.

$$\mathrm{I}(x) = 10e^{-0{,}05x}$$

$$\mathrm{I}'(x) = 10 \times e^{-0{,}05x} \times (-0{,}05)$$

$$\mathrm{I}'(x) = -0{,}5 \times e^{-0{,}05x}$$

Como esta derivada é sempre negativa em todo o seu domínio, então a função é monótona decrescente.

Como a função é contínua em $[0,+\infty[$, não existem assímptotas verticais. Como

$$\lim_{x \to +\infty} 10 \times e^{-0{,}05x} = 0$$

podemos concluir que existe uma assímptota horizontal, a recta de equação **y=0**.

No contexto do problema, podemos afirmar que quanto maior for a profundidade, menor será a intensidade da luz, e que se a profundidade aumentar indefinidamente a intensidade da luz tenderá a ser nula.