

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto – Programas novos
e Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da prova: 150 minutos
2007

2.ª FASE

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA A / MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implica a anulação de todos os itens de escolha múltipla.

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 12.

A prova inclui um formulário na página 3.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Considere um rectângulo cuja área é igual a 5.
Qual das seguintes expressões representa o perímetro deste rectângulo, em função do comprimento, x , de um dos seus lados?

(A) $2x + \frac{10}{x}$

(B) $2x + \frac{2x}{5}$

(C) $2x + \frac{5}{x}$

(D) $x + \frac{5}{x}$

2. Seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 3 - 2 \cos x$.

Indique o valor de x para o qual $f(x)$ é máximo.

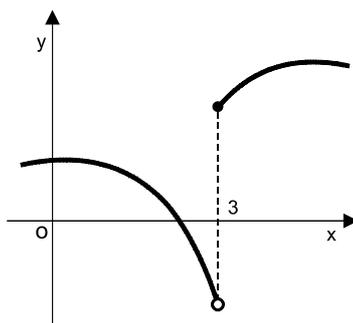
(A) 0

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) π

(D) $\frac{3\pi}{2}$

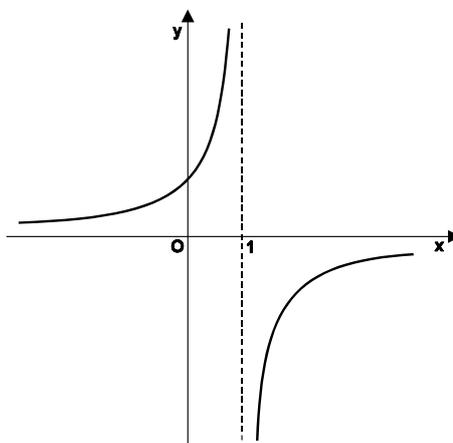
3. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f , real de variável real.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)} = 0$ (B) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$
- (C) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{2}$ (D) Não existe $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$

4. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função g , real de variável real. Tal como a figura sugere, a recta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico da função g .



Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = x - 1$.

O valor do $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{g(x)}$ é:

- (A) $-\infty$ (B) $+\infty$ (C) 0 (D) 1

- 5.** Dois cientistas, que vão participar num congresso no estrangeiro, mandam reservar hotel na mesma cidade, cada um sem conhecimento da marcação feita pelo outro.

Sabendo que nessa cidade existem sete hotéis, todos com igual probabilidade de serem escolhidos, qual é a probabilidade de os dois cientistas ficarem no mesmo hotel?

(A) $\frac{1}{7}$

(B) $\frac{2}{7}$

(C) $\frac{5}{7}$

(D) $\frac{6}{7}$

- 6.** Lançaram-se dois dados, ambos com as faces numeradas de um a seis. Sabe-se que a soma dos números saídos foi quatro.

Qual é a probabilidade de ter saído o mesmo número, em ambos os dados?

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{2}$

- 7.** Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja i a unidade imaginária.

Seja n um número natural tal que $i^n = -i$.

Indique qual dos seguintes é o valor de i^{n+1} .

(A) 1

(B) i

(C) -1

(D) $-i$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, sejam:

$$z_1 = 3 + yi \quad \text{e} \quad z_2 = 4i z_1$$

(i é a unidade imaginária e y designa um número real).

- 1.1. Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, $\text{Arg}(z)$ designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.

Admitindo que $\text{Arg}(z_1) = \alpha$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, determine o valor de $\text{Arg}(-z_2)$ em função de α .

- 1.2. Sabendo que $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$, determine z_2 .
Apresente o resultado na forma algébrica.

2. De um baralho de cartas, seleccionaram-se 16 cartas (4 ases, 4 reis, 4 damas e 4 valetes).
Dividiram-se as 16 cartas em dois grupos: um com os ases e os reis e outro com as damas e os valetes.

Retiraram-se, ao acaso, duas cartas de cada grupo (sem reposição).

Qual é a probabilidade de obter um conjunto formado por um ás, um rei, uma dama e um valete, não necessariamente do mesmo naipe?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Considere um espaço de resultados finito, Ω , associado a uma certa experiência aleatória.

A propósito de dois acontecimentos X e Y ($X \subset \Omega$ e $Y \subset \Omega$), sabe-se que

$$P(X) = a$$

$$P(Y) = b$$

X e Y são independentes

- 3.1. Mostre que a probabilidade de que não ocorra X nem ocorra Y é igual a

$$1 - a - b + a \times b$$

- 3.2. Num frigorífico, há um certo número de iogurtes e um certo número de sumos. Tiram-se do frigorífico, ao acaso, um iogurte e um sumo. Sabe-se que a probabilidade de o iogurte ser de pêssago é $\frac{1}{5}$ e a probabilidade de o sumo ser de laranja é $\frac{1}{3}$.

Admita que os acontecimentos «tirar um iogurte de pêssago» e «tirar um sumo de laranja» são independentes.

Utilizando a expressão mencionada em 3.1., determine a probabilidade de, ao tirar, ao acaso, um iogurte e um sumo do frigorífico, o iogurte não ser de pêssago e o sumo não ser de laranja.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Considere a função g , definida no intervalo $]1, 7[$ por $g(x) = \frac{\text{sen } x + \ln x}{x}$
(\ln designa logaritmo na base e)

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, visualize o gráfico da função g e reproduza-o na sua folha de prova.

Com base nesse gráfico e utilizando as ferramentas adequadas da sua calculadora, resolva o seguinte problema:

Seja g' a função derivada de g . O conjunto solução da inequação $g'(x) < 0$ é um intervalo aberto $]a, b[$. Determine os valores de a e de b . Apresente os resultados arredondados às centésimas.

Justifique a sua resposta.

5. Na figura 1 está representada parte do gráfico de uma função h , de domínio \mathbb{R}_0^+ .

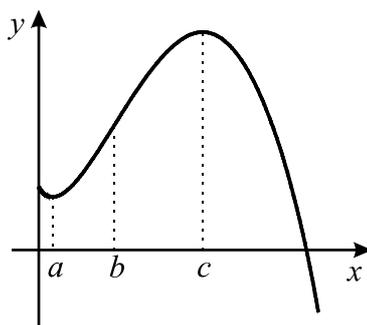


Figura 1

Em cada uma das figuras abaixo está representada parte do gráfico de uma função de domínio \mathbb{R}_0^+ .

Uma das funções representadas é h' , primeira derivada de h , e a outra é h'' , segunda derivada de h .

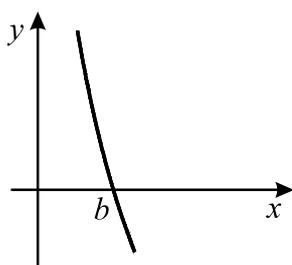


Figura 2

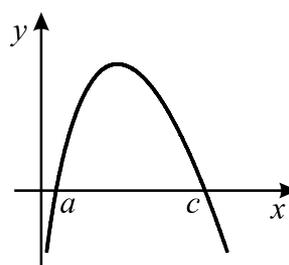


Figura 3

Numa pequena composição, explique em qual das figuras está representado o gráfico da primeira derivada e em qual está representado o gráfico da segunda derivada. Na sua composição, deve referir-se à variação de sinal das funções h' e h'' , relacionando-a com características da função h (monotonia e sentido das concavidades do seu gráfico).

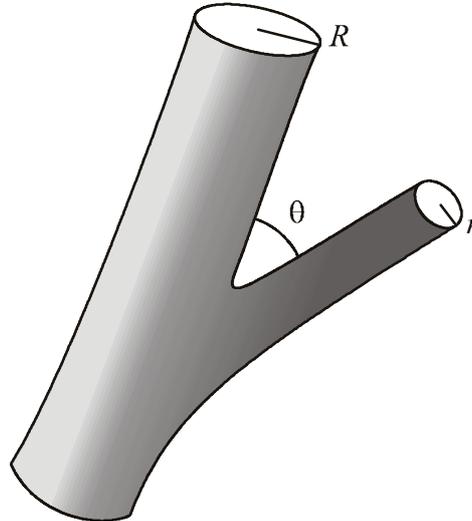
6. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 1 - \ln(x^2)$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos:

6.1. Determine os pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox .

6.2. Estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

7. Na figura seguinte está representada uma artéria principal do corpo humano, cuja secção é um círculo com raio R , e uma sua ramificação, mais estreita, cuja secção é um círculo com raio r .



A secção da artéria principal tem área A e a da ramificação tem área a .

Seja $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ a amplitude, em radianos, do ângulo que a artéria principal faz com a sua ramificação (medida relativamente a duas geratrizes planares dos dois cilindros).

Sabe-se que $a = A\sqrt{\cos\theta}$

Admitindo que o modelo descrito se adequa com exactidão à situação real, determine θ no caso em que os raios referidos verificam a relação $R = \sqrt[4]{2} r$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (7 x 9 pontos)..... **63 pontos**

Cada resposta certa 9 pontos
Cada resposta errada..... 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada 0 pontos

Grupo II **137 pontos**

1. 21 pontos

1.1. 10 pontos

1.2. 11 pontos

2. 10 pontos

3. 22 pontos

3.1. 12 pontos

3.2. 10 pontos

4. 18 pontos

5. 15 pontos

6. 34 pontos

6.1. 16 pontos

6.2. 18 pontos

7. 17 pontos

TOTAL **200 pontos**