APM
Associação de Professores de Matemática

Proposta de Resolução do Exame do 12º Ano de Matemática A

Cod 635 – 2ª Fase 2007

Grupo I

	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	C	D	C	A	C	A
Versão 2	D	B	A	D	C	A	B

Grupo 2

1.1. Existem vários processos de resolução desta questão. Apresentamos o seguinte:

$$Z_1 = \rho \ cis\,\alpha$$

$$-Z_2 = -4i\ Z_1$$

$$-Z_2 = 4cis\left(\frac{3\pi}{2}\right) \times \rho\ cis\alpha$$

$$-Z_2 = 4\ \rho\ cis\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $Arg\,(-Z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$

1.2.

$$Z_1 = 3 + yi$$

$$Z_2 = 4i\ Z_1$$

$$Z_2 = 4i\ (3 + yi)$$

$$Z_2 = -4y + 12i$$

Como $\mathrm{Im}(Z_1) = \mathrm{Im}(Z_2)$ então $y = 12$

Logo $Z_2 = -48 + 12i$

2. Casos possíveis: ${}^8C_2 \times {}^8C_2$

Casos favoráveis: $(4\times 4)\times(4\times 4)$

Pela Lei de Laplace:

$$P = \frac{(4\times 4)\times(4\times 4)}{{}^8C_2 \times {}^8C_2} = \frac{16}{49}$$

3.1. $P\left(\overline{X}\cap\overline{Y}\right)=P\left(\overline{X\cup Y}\right)=1-P(X\cup Y)=$

$=1-\left[P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)\right]$

Como **X** e **Y** são acontecimentos independentes:

$P(X\cap Y)=P(X)\times P(Y)$

Logo:

$=1-\left[P(X)+P(Y)-P(X)\times P(Y)\right]=$

$=1-(a+b-a\times b)=1-a-b+a\times b$

c.q.d.

3.2. **X**: "Tirar um iogurte de pêssego"

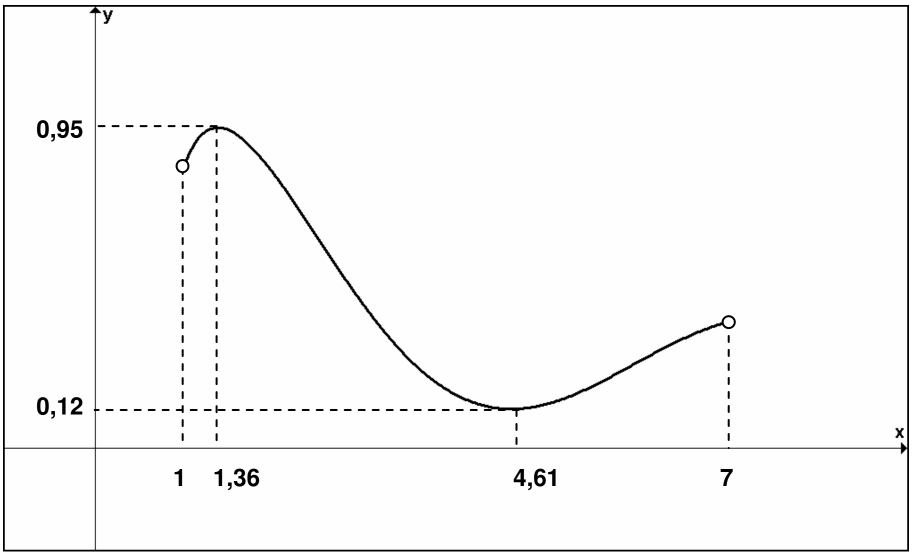
Y: "Tirar um sumo de laranja"

$P(X)=\frac{1}{5} \quad e \quad P(Y)=\frac{1}{3}$

A probabilidade de tirar um iogurte que não é de pêssego e um sumo que não é de laranja é:

$P\left(\overline{X}\cap\overline{Y}\right)=1-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$

4.



$g'(x)<0$ quando a função **g** é decrescente. Assim sendo, utilizando as funcionalidades da calculadora determinamos $a\approx 1{,}36$ e $b\approx 4{,}61$.

5.

A função h é decrescente em $]0,a[$ e em $]c,+\infty[$, logo nesses intervalos h' é negativa. Em $]a,c[$ é crescente, logo h' é positiva nesse intervalo. Por outro lado a função h apresenta extremos relativos para $x=a$ e para $x=c$, devendo por isso a função h' tomar o valor zero para $x=a$ e para $x=c$. Assim, o gráfico de h' está representado na figura 3.

O gráfico da função h tem a concavidade voltada para cima em $]0,b[$, logo h'' é positiva nesse intervalo. O gráfico da função h tem a concavidade voltada para baixo em $]b,+\infty[$, logo h'' é negativa nesse intervalo. Para $x=b$, o gráfico de h admite um ponto de inflexão. Assim, o gráfico de h'' tem que ser o da figura 2.

6.1. Temos de ter:

$$\mathbf{f(x) = 0}$$

$$1-\ln(x^2)=0$$

$$\ln(x^2)=1$$

$$x^2=e$$

$$x=\pm\sqrt{e}$$

Os pontos pedidos, de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox são:

$(\sqrt{e},0)$ e $(-\sqrt{e},0)$.

6.2. $f(x)=1-\ln(x^2)$

$$f'(x)=-\frac{2x}{x^2}=-\frac{2}{x}$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
f '(x)	+	ND	-
f (x)	↗	ND	↘

A função é crescente em $]-\infty,0[$ e decrescente em $]0,+\infty[$.

Não tem extremos relativos porque, embora exista mudança do sinal de $f'(x)$ a função f não está definida para $x=0$.

7. $a = A\sqrt{\cos\theta}$

Como $a = \pi r^2$ e $A = \pi R^2$

$\pi r^2 = \pi R^2\sqrt{\cos\theta}$

$r^2 = R^2\sqrt{\cos\theta}$

Como $R = \sqrt[4]{2}\, r$

$r^2 = \left(\sqrt[4]{2}\, r\right)^2\sqrt{\cos\theta}$

$r^2 = \sqrt{2}\; r^2\sqrt{\cos\theta}$

$$\sqrt{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$, pois $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

FIM