Proposta de Resolução do Exame do 12º ano Matemática A (Prova 635)

2008 - 1ª Fase

Grupo I

Versão 1

1	2	3	4	5	6	7	8
B	C	C	D	B	C	B	B

Versão 2

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	B	A	C	B	C	C

Grupo II

1.1. $-z_1$ será uma raiz cúbica de z_2 se $(-z_1)^3 = z_2$.

Ora $-z_1 = -1+\sqrt{3}\,i$.

Como $|-z_1| = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 2$ e o afixo do complexo pertence ao 2º quadrante e $\operatorname{tg}(\arg(-z_1)) = -\sqrt{3}$ então $-z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

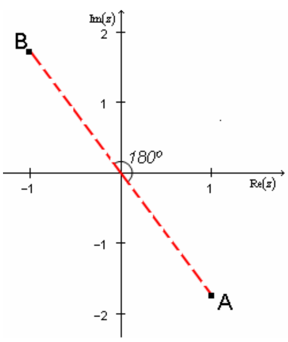
Vem $(-z_1)^3 = (2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3})^3 = 2^3 \operatorname{cis} (3\times\frac{2\pi}{3}) = 8 \operatorname{cis} (2\pi) = 8 \operatorname{cis} 0 = z_2$

1.2. Como

$$z_3 = z_1 \times i^{46} = z_1 \times (i^4)^{11} \times i^2 = -z_1$$

os pontos A e B, respectivamente afixos de z_1 e de z_3, são simétricos em relação à origem do referencial.

Daí $\overline{AB} = 2 \times |-z_1| = 4$



2.1. Considerando que foram feitas mil rifas:

Seja A o acontecimento " a rifa premiada tem um único algarismo 5".

Tendo em consideração que estamos em presença de acontecimentos equiprováveis

$$P(A) = \frac{\text{n.º de casos favoráveis}}{\text{n.º de casos possíveis}}$$

n.º de casos possíveis = 10 × 10 × 10

n.º de casos favoráveis = 3 × 9 × 9

5	___	___
___	5	___
___	___	5

Então

$P(A) = \dfrac{3 \times 9 \times 9}{10 \times 10 \times 10} = \dfrac{243}{1000} = 0{,}243$

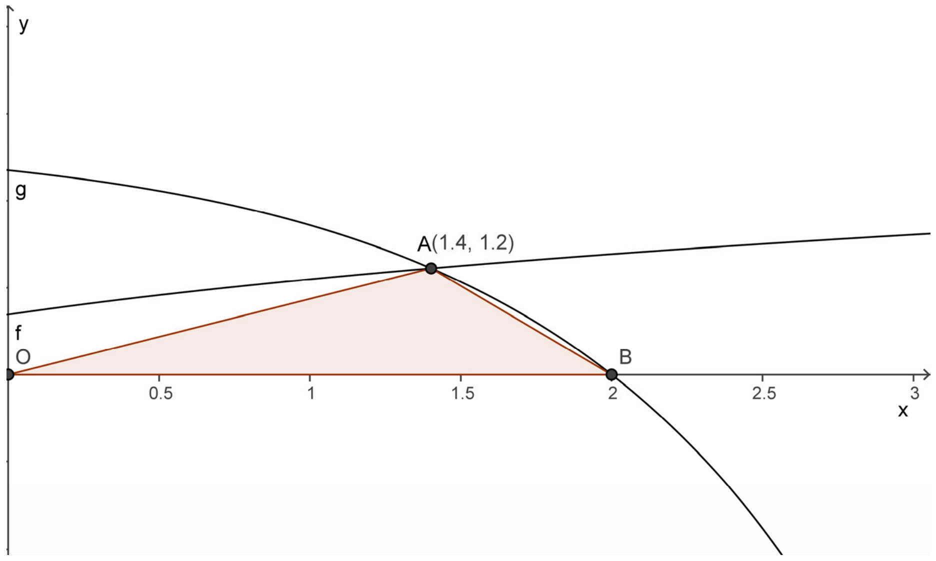
isto é, a probabilidade de a rifa premiada ter um único algarismo 5 é 0,24 (com aproximação às centésimas).

2.2. Sendo a turma constituída por 12 raparigas e 10 rapazes, como a comissão tem que ter obrigatoriamente 3 raparigas e 2 rapazes, o número total de comissões diferentes que satisfaçam esta condição é dada por ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2$, uma vez que se está a escolher independentemente e sem preocupações de ordenação 3 raparigas e 2 rapazes.
Se retirarmos a estas comissões aquelas a que a Ana e o Miguel pertencem em simultâneo obtemos as comissões pretendidas.
Estando a Ana e o Miguel em simultâneo na comissão há lugar para 2 raparigas escolhidas entre as restantes 11 e 1 rapaz escolhido entre os 9 restantes.
Assim sendo, o número de comissões a que eles pertencem em simultâneo é dado por ${}^{11}C_2 \times {}^{9}C_1$.
Então, ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9$ é o número de comissões em que a Ana e o Miguel não fazem parte em simultâneo.

3. Sabendo que a probabilidade da bola retirada da caixa B ser azul é igual a $\frac{1}{2}$ e que há apenas bolas azuis e verdes dentro da caixa com igual probabilidade de serem retiradas, então terá que haver na caixa B o mesmo número de bolas verdes e azuis.
Dado que inicialmente havia dentro da caixa B menos 1 bola verde do que azuis então a bola recebida da caixa A teve que ser necessariamente verde.

4. A existirem assímptotas verticais apenas poderão ser as rectas de equação $x = -\pi$ ou $x = 0$ dado que a função f é contínua em $]-\pi, 0[$ e em $]0, +\infty[$.
Sendo $\lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x) = \dfrac{3 sen\pi}{(-\pi)^2} = 0$, a recta de equação $x = -\pi$ não é assímptota vertical.
Sendo $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}\left(3 \times \dfrac{sen\pi}{x} \times \dfrac{1}{x}\right) = 3 \times 1 \times (-\infty) = -\infty$, então a recta de equação $x = 0$ é assímptota vertical.
Tendo em consideração o domínio da função (intervalo de números reais limitado à esquerda), calcula-se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ para averiguar se existe alguma assímptota horizontal.
Como $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-4x+1} = 0$, então a recta de equação $y = 0$ é a assímptota horizontal.

5.



A área do triângulo [OAB] é dada por $\dfrac{2{,}0 \times 1{,}2}{2} \approx 1{,}2$ unidades de área (com aproximação às décimas).

6. 1. Para estudarmos a monotonia da função h vamos estudar o sinal da sua derivada.

$h'(x) = -1 + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{-x}{x+1}$ para $x > -1$. Fazendo o quadro de sinais vem

	-1		0		$+\infty$
$-x$	n.d.	+	0	−	
$x+1$	n.d.	+	+	+	
h'(x)	n.d.	+	0	−	

donde

	-1		0		$+\infty$
h'	n.d.	+	0	−	
h	n.d.	↗	Máx	↘	

Pode-se, então, concluir que a função é monótona crescente em]-1, 0[, é monótona decrescente em]0, +∞[e tem máximo igual a $h(0)$, isto é, igual a 4 para $x = 0$ já que a função é contínua em]-1, +∞[, por se tratar da soma de duas funções contínuas.

6.2. Como a função h é contínua em]-1, +∞[então é contínua em [5, 6]. Sendo $h(5) = -1 + \ln 6 \approx 0{,}79$, portanto um número positivo e $h(6) = -2 + \ln 7 \approx -0{,}05$ um número negativo, o Teorema de Bolzano garante-nos que terá que haver pelo menos um $\alpha \in]5, 6[$, tal que $h(\alpha) = 0$.

7.1. $N(0)=\frac{2000}{1+199\times 1}=10$. Significa que foram 10 sócios que constituíram a associação.

$\lim_{x\to+\infty} N(t)=\frac{2000}{1+199\times 0}=2000$. Significa que o número de sócios ao longo dos anos tende a estabilizar à volta dos 2000.

7.2. Averiguemos quando o número de sócios é 1000. Precisamos resolver para $t>0$ a equação $N(t)$ = 1000.

$$N(t) = 1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+199\times e^{-0,01\,t}} = 1000 \Leftrightarrow 1+199\times e^{-0,01\,t} = 2 \Leftrightarrow e^{-0,01\,t} = \frac{1}{199} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,01t = ln\left(\frac{1}{199}\right) \Leftrightarrow t \approx 529,33$$

Assim, ao fim de 530 dias comemorou-se a inscrição do sócio número 1000.