Prova Escrita de Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de **escolha múltipla**, escreva, na folha de respostas,

- o **número** do item;
- a **letra identificativa** da alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Nos itens de resposta aberta com cotação igual ou superior a 15 pontos e que impliquem a produção de um texto, o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa representa cerca de 10% da cotação.

As cotações dos itens encontram-se na página 11.

A prova inclui um Formulário na página 4.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro × Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(*r – raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approxeq 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approxeq 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approxeq 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Ao disputar um torneio de tiro ao alvo, o João tem de atirar sobre o alvo quatro vezes. Sabe-se que, em cada tiro, a probabilidade de o João acertar no alvo é 0,8.

Qual é a probabilidade de o João acertar sempre no alvo, nas quatro vezes em que tem de atirar?

(A) $0{,}0016$ **(B)** $0{,}0064$ **(C)** $0{,}0819$ **(D)** $0{,}4096$

2. Uma caixa A contém duas bolas verdes e uma bola amarela. Outra caixa B contém uma bola verde e três bolas amarelas. As bolas colocadas nas caixas A e B são indistinguíveis ao tacto.
Lança-se um dado cúbico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 6. Se sair o número 5, tira-se uma bola da caixa A; caso contrário, tira-se uma bola da caixa B.

Qual é a probabilidade de a bola retirada ser verde, sabendo que saiu o número 5 no lançamento do dado?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{3}{7}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

3. Uma linha do Triângulo de Pascal tem quinze elementos.

Quantos elementos dessa linha são inferiores a 100?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8

4. Sabe-se que o ponto $P(1,\,3)$ pertence ao gráfico da função $f(x) = 2^{ax} - 1,\ a \in \mathbb{R}$.

Qual é o valor de a?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** -2

5. Na figura 1 está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. As rectas de equações $x = -2$ e $y = 1$ são as únicas assimptotas do gráfico de g.

Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = +\infty$.

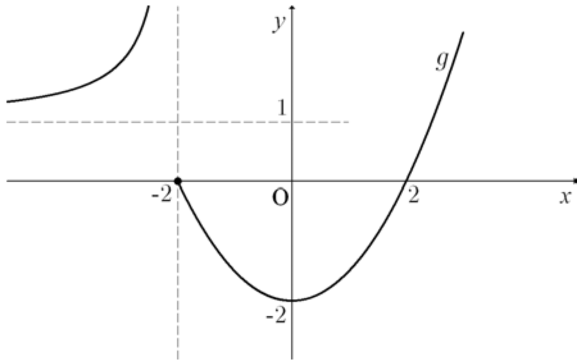


Fig. 1

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n) ?

(A) $-2 + \dfrac{2}{n}$ **(B)** $-2 - \dfrac{1}{n}$ **(C)** $1 + \dfrac{1}{n}$ **(D)** $1 - \dfrac{1}{n}$

6. Na figura 2 está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sendo $y = -1$ a única assimptota do seu gráfico.

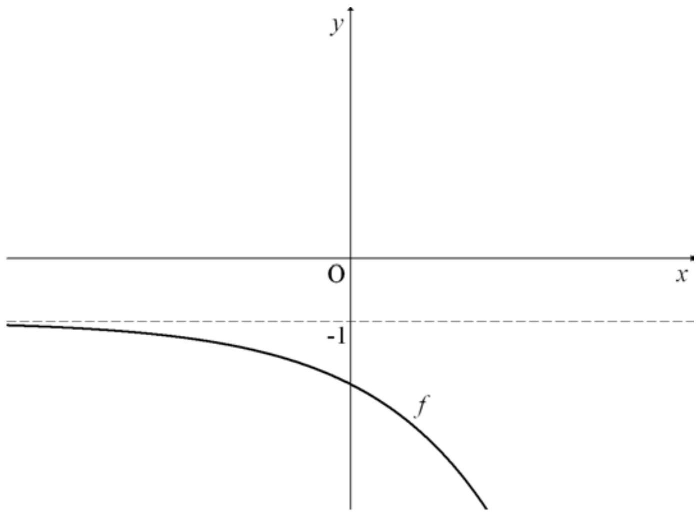


Fig. 2

Qual é o valor do $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{f(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** -3 **(C)** -1 **(D)** 3

7. Seja z um número complexo de argumento $\dfrac{\pi}{6}$.

Qual dos seguintes valores é um argumento de $(-z)$?

(A) $-\dfrac{\pi}{6}$ **(B)** $\dfrac{5}{6}\pi$ **(C)** π **(D)** $\dfrac{7}{6}\pi$

8. Considere a figura 3, representada no plano complexo.

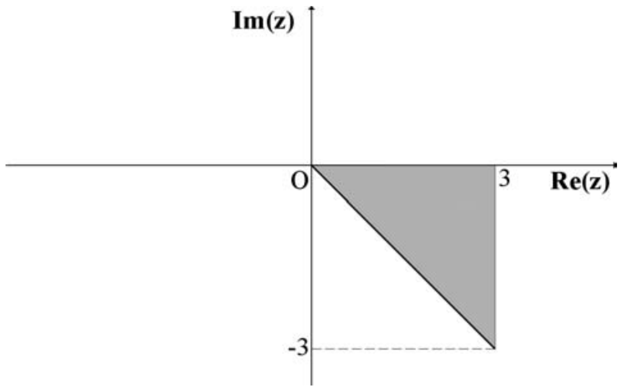


Fig. 3

Qual é a condição, em $\mathbb{C}$, que define a região sombreada da figura, incluindo a fronteira?

(A) $\mathrm{Re}(z) \leq 3 \wedge -\dfrac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

(B) $\mathrm{Re}(z) \leq 3 \wedge 0 \leq \arg(z) \leq \dfrac{\pi}{4}$

(C) $\mathrm{Im}(z) \leq 3 \wedge -\dfrac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

(D) $\mathrm{Re}(z) \geq 3 \wedge -\dfrac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

GRUPO II

Na resposta a itens deste grupo, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine o valor de $\dfrac{2z_1 - i^{18} - 3}{1 - 2i}$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

1.2. Considere z_1 uma das raízes quartas de um certo número complexo z.

Determine uma outra raiz quarta de z, cuja imagem geométrica é um ponto pertencente ao 3.º quadrante.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

2.

2.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Prove que: $$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B)$$

(P designa a probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A e $\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B.)

2.2. Numa determinada cidade, das 160 raparigas que fizeram o exame nacional de Matemática, 65% tiveram classificação positiva, e, dos 120 rapazes que fizeram o mesmo exame, 60% também tiveram classificação positiva.
Escolhendo, ao acaso, um dos estudantes que realizaram o exame, qual é a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva?

Apresente o resultado em forma de dízima, com aproximação às centésimas.

Nota:

Se o desejar, utilize a igualdade referida em **2.1.** Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada; no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo.

3. Numa caixa temos três fichas com o número 1 e quatro fichas com o número 2, indistinguíveis ao tacto.
Retiram-se, ao acaso e de uma só vez, duas fichas.
Seja X a variável aleatória: *«a soma dos números inscritos nas duas fichas»*.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X.

Indique, justificando, o valor mais provável da variável X.

Apresente as probabilidades na forma de fracção irredutível.

4. Considere a função f, de domínio $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, definida por $f(x)=\dfrac{\ln(2x+1)}{2x+1}$, e a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=x-2$ $\quad$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Indique as soluções inteiras da inequação $f(x)>g(x)$, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Para resolver esta inequação, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda, os pontos A e B, de intersecção dos gráficos das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas.

5. Na figura 4 estão representadas duas rectas paralelas, a recta AB (em que A e B são pontos fixos) e a recta s.
O ponto S é um ponto móvel, deslocando-se ao longo de toda a recta s.
Para cada posição do ponto S, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAS e seja $a(x)$ a área do triângulo $[ABS]$.

Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função a.

Numa composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função a.

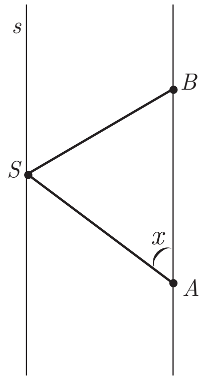


Fig. 4

Gráfico 1

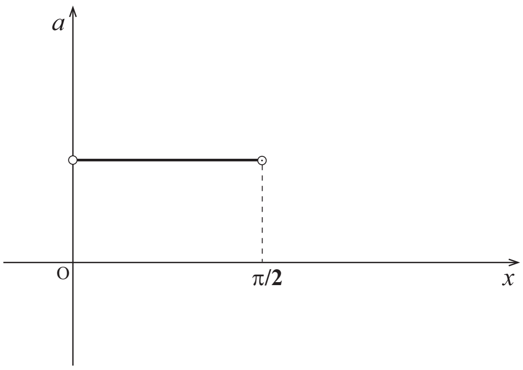


Gráfico 2

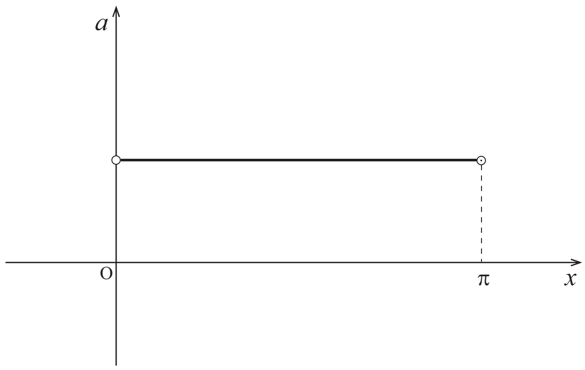


Gráfico 3

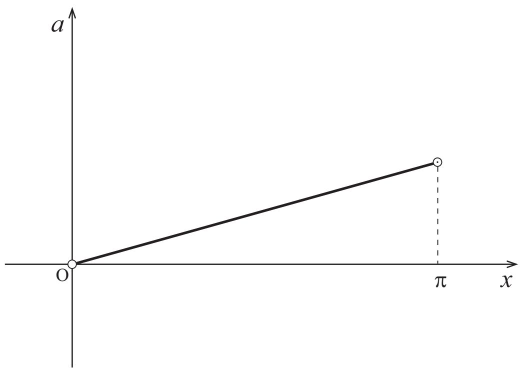
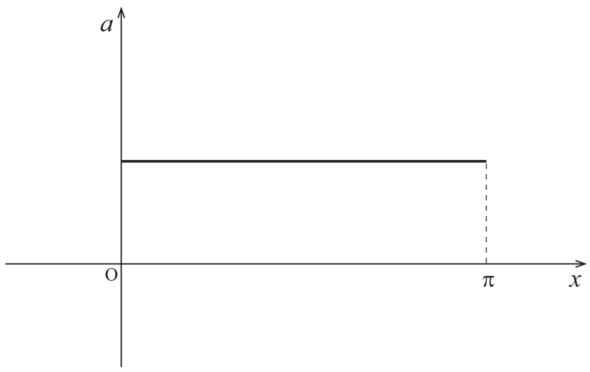


Gráfico 4



6. A massa de uma substância radioactiva diminui com a passagem do tempo. Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de t **horas** de observação, é dada pelo modelo matemático $M(t) = 15 \times e^{-0{,}02\ t}\ , \quad t \geq 0.$

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens que se seguem.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

6.1. Ao fim de quanto tempo se reduz a metade a massa inicial da amostra da substância radioactiva?

Apresente o resultado em **horas e minutos**, estes arredondados às unidades.

6.2. Utilize o **Teorema de Bolzano** para justificar que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioactiva atingiu os 14 gramas.

7. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2 + \operatorname{sen}(4x).$

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

7.1. Determine $g'(0)$, recorrendo à **definição de derivada** de uma função num ponto.

7.2. Estude a monotonia da função g, no intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, indicando o valor dos extremos relativos, caso existam, e os intervalos de monotonia.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I	(8 × 5 pontos)	**40 pontos**
GRUPO II		**160 pontos**
1.	30 pontos	
1.1.	15 pontos	
1.2.	15 pontos	
2.	30 pontos	
2.1.	15 pontos	
2.2.	15 pontos	
3.	15 pontos	
4.	15 pontos	
5.	15 pontos	
6.	30 pontos	
6.1.	15 pontos	
6.2.	15 pontos	
7.	25 pontos	
7.1.	10 pontos	
7.2.	15 pontos	
TOTAL		**200 pontos**