Proposta de Resolução do Exame do 12º ano Matemática A (Prova 635)

2008 - 2ª Fase

Parte I (Escolha Múltipla)

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	D	D	C	A	B	B	D	A
Versão 2	A	A	B	D	C	C	A	D

Parte II

1.1. $\dfrac{2z_1 - i^{18} - 3}{1-2i} = \dfrac{2-2i+1-3}{1-2i} = \dfrac{-2i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{-2i+4}{1+4} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i$

1.2. $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}cis\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Sendo z_1 uma das raízes quartas de um número complexo z, as outras raízes são:

$z_2 = \sqrt{2}cis\left(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $z_3 = \sqrt{2}cis\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi\right)$ e $z_4 = \sqrt{2}cis\left(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{2}\right)$, então pode concluir-se que a raiz cuja imagem geométrica é um ponto do 3º quadrante é $z_4 = \sqrt{2}cis\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

2.1.

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) &= P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) \\ &= P\left(\overline{A}\right)+1-P(B)-P\left(\overline{A\cup B}\right) \\ &= P\left(\overline{A}\right)-P(B)+1-P\left(\overline{A\cup B}\right) \\ &= P\left(\overline{A}\right)-P(B)+P(A\cup B) \end{aligned}$$

c.q.d.

2.2.

	Positiva no exame	Não positiva no exame	Total
Rapaz	0,60X120=**72**	120-72=**48**	120
Rapariga	0,65X160=**104**	160-104=**56**	160
Total	176	104	280

Consideremos os acontecimentos R: "ser rapaz" e P: "ter positiva no exame".

A probabilidade pretendida é $P\left(\overline{R}\cup\overline{P}\right)$.

$$P\left(\overline{R}\cup\overline{P}\right) = P\left(\overline{R}\right)+P\left(\overline{P}\right)-P\left(\overline{R}\cap\overline{P}\right) = \frac{160}{280}+\frac{104}{280}-\frac{56}{280} = \frac{208}{280} \simeq 0,74$$

3.

Sendo X a variável aleatória: "soma dos números inscritos nas duas fichas", pode tomar os valores 2, 3 ou 4.

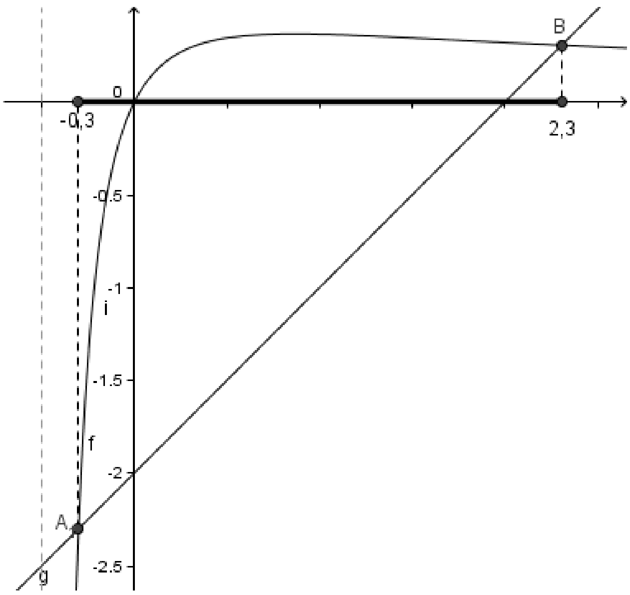
$P(X=2)=\dfrac{3\times 2}{7\times 6}=\dfrac{1}{7}$, $P(X=3)=\dfrac{3\times 4}{7\times 6}\times 2=\dfrac{4}{7}$ e $P(X=4)=\dfrac{4\times 3}{7\times 6}=\dfrac{2}{7}$.

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é:

x_i	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{4}{7}$	$\dfrac{2}{7}$

O valor mais provável da variável é portanto 3.

4.



As coordenadas dos pontos A e B com aproximação às décimas são: $A(-0,3;-2,3)$ e $B(2,3;0,3)$.

A solução, no domínio $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, da inequação $f(x)>g(x)$ é o conjunto $]-0,3\,;\,2,3[$, abcissas dos pontos do gráfico de f acima dos pontos do gráfico de g.

Assim, as soluções inteiras são

$$x=0,\ x=1, x=2$$

5.

O gráfico que representa a função a é o Gráfico 2.

Rejeita-se o gráfico 1 porque x varia entre 0 e π e o gráfico 3 porque se considerarmos a base $[AB]$, a correspondente altura é a medida da distância entre as rectas, e consequentemente a área é constante, pelo que o gráfico tem de ser um segmento de recta paralelo ao eixo das abcissas. O gráfico 4 é rejeitado porque 0 e π não pertencem ao domínio, uma vez que sendo as rectas estritamente paralelas, o ponto S nunca pertence a AB.

6.1.

$M(0)=15$.

$$M(t)=\frac{1}{2}M(0)\Leftrightarrow 15e^{-0,02t}=\frac{15}{2}\Leftrightarrow e^{-0,02t}=0,5\Leftrightarrow -0,02t=\ln(0,5)\Leftrightarrow t=\frac{\ln(0,5)}{-0,02}\Leftrightarrow t\simeq 34,657$$

Dado que 60×0,657=39,42, podemos dizer, tendo em consideração as instruções de arredondamento, que a massa inicial reduz-se a metade ao fim de 34 h e 39 min.

6.2. A função M é contínua em $[0,+\infty[$ porque é uma função exponencial (produto de uma constante pela composta da exponencial e^x com uma função afim), e consequentemente é contínua em $[2,5\,;4]$.

Como, além disso, $M(2,5)\simeq 14,268$, $M(4)\simeq 13,847$ e $14\in\,]M(4),M(3)[$, o teorema de Bolzano garante que existe pelo menos um valor no intervalo $]2,5\,;4[$, cuja imagem é 14. Deste modo pode então dizer-se que entre as 2h 30min e as 4 h após o início da observação a massa da amostra atingiu os 14 gramas.

7.1.

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2+sen(4x)-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(4x)}{4x}\times 4=1\times 4=4$$

7.2.

$g'(x)=4\cos(4x)$

$$g'(x)=0\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \cos(4x)=0\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+k\pi\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}\vee x=\frac{3\pi}{8}$$

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
g'		+	0	-	0	+	
g		↗	3	↘	1	↗	

A função g é monótona crescente em $\left]0,\frac{\pi}{8}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right[$.

É monótona decrescente em $\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$

A função tem máximo 3 em $\frac{\pi}{8}$ e mínimo 1 em $\frac{3\pi}{8}$.