

## Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

**Prova 635/1.ª Fase**

12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

**2009**

### COTAÇÕES

**GRUPO I** ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

**GRUPO II** ..... **160 pontos**

1. .... 30 pontos

1.1. .... 15 pontos

1.2. .... 15 pontos

2. .... 15 pontos

3. .... 30 pontos

3.1. .... 15 pontos

3.2. .... 15 pontos

4. .... 15 pontos

5. .... 30 pontos

5.1. .... 15 pontos

5.2. .... 15 pontos

6. .... 15 pontos

7. .... 25 pontos

7.1. .... 10 pontos

7.2. .... 15 pontos

**TOTAL**..... **200 pontos**

**A classificação da prova deve respeitar integralmente  
os critérios gerais e específicos a seguir apresentados**

### **CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO**

A classificação a atribuir a cada item é obrigatoriamente:

- um número inteiro;
- um dos valores resultantes da aplicação dos critérios gerais e específicos de classificação e previstos na respectiva grelha de classificação.

As respostas que se revelem ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de um item, o mesmo pode ser classificado se, pela resposta apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser apenas considerada a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

Nos itens de resposta fechada de escolha múltipla, a cotação total do item só é atribuída às respostas que apresentam, de forma inequívoca, a única alternativa correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que é assinalada:

- uma alternativa incorrecta;
- mais do que uma alternativa.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Nos itens de resposta aberta extensa orientada, com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa.

A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos.

<b>Nível</b>	<b>Descritor</b>
<b>3</b>	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
<b>2</b>	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
<b>1</b>	Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação de um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível.  A classificação da resposta resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual se subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Classificação de uma etapa dividida em passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível.  A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
3. Classificação de um item ou de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto.  O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [por exemplo, «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber, inequivocamente, que a etapa foi percorrida, a mesma é classificada com a cotação total para ela prevista.
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução não diminuir, é subtraído um ponto à classificação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à classificação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

\* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	<p>A etapa é classificada de acordo com o erro cometido.</p> <p>As etapas subsequentes são classificadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são classificadas de acordo com os critérios específicos de classificação;</li> <li>- se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a classificação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</li> </ul>
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se, à resolução da etapa, faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à classificação da etapa; caso contrário, a classificação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é classificada com a cotação total para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	<p>É subtraído um ponto à classificação total da resposta, excepto:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- se as correcções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos;</li> <li>- nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.</li> </ul>

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

### GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	A	D	B	C	D	A	C	C
Versão 2	D	A	C	B	A	D	B	B

### GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no programa (ver critério 4 dos critérios gerais).

1.1. .... 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

#### 1.º processo

Calcular  $z_1$  na forma algébrica ..... 8 pontos

Apresentam-se duas possíveis resoluções para o cálculo de  $z_1$  :

Calcular  $i^{18}$  ( $i^{18} = -1$ ) ..... 1 ponto

Calcular  $\frac{i}{1-i} + 1$   $\left( \frac{i}{1-i} + 1 = \frac{1}{1-i} \right)$  ..... 3 pontos

Calcular  $\frac{1}{1-i}$   $\left( \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right)$  ..... 4 pontos

Multiplicar ambos os termos da fracção por  $1 + i$  ... 2 pontos

Restantes cálculos ..... 2 pontos

#### OU

Calcular  $i^{18}$  ( $i^{18} = -1$ ) ..... 1 ponto

Calcular  $\frac{i}{1-i}$   $\left( \frac{i}{1-i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right)$  ..... 5 pontos

Multiplicar ambos os termos da fracção por  $1 + i$  ... 2 pontos

Restantes cálculos ..... 3 pontos

Calcular  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + 1$   $\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right)$  ..... 2 pontos

Calcular  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  na forma trigonométrica (**ver nota**) ..... 7 pontos

Calcular o módulo  $\left( \rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou equivalente} \right)$  ..... 3 pontos

Indicar um argumento  $\left( \theta = \frac{\pi}{4} \right)$  ..... 3 pontos

Escrever  $z_1$  na forma trigonométrica  $\left( z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{4} \right) \right)$  ... 1 ponto

**Nota:** Esta etapa segue-se a qualquer uma das duas resoluções para o cálculo de  $z_1$  na forma algébrica, apresentadas anteriormente.

## 2.º processo

Calcular  $i^{18}$  ( $i^{18} = -1$ ) ..... 1 ponto

Calcular  $\frac{i}{1-i} + 1$   $\left( \frac{i}{1-i} + 1 = \frac{1}{1-i} \right)$  ..... 3 pontos

Calcular  $\frac{1}{1-i}$  na forma trigonométrica ..... 11 pontos

Escrever  $1 = \operatorname{cis}(0)$  ..... 2 pontos

Calcular  $1 - i$  na forma trigonométrica ..... (2 + 2 + 1) ..... 5 pontos

Escrever  $\frac{1}{1-i} = \frac{\operatorname{cis}(0)}{\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$  ..... 1 ponto

Efectuar a divisão na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Escrever  $z_1$  na forma trigonométrica  $\left( z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{4} \right) \right)$  ... 1 ponto

**1.2.** ..... **15 pontos**

Escrever  $-i = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever  $-i \cdot z_2 = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$  ..... 1 ponto

Efectuar o produto  $\left( -i \cdot z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$  (ou equivalente) ..... 4 pontos

Escrever  $\left( \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)^n = \operatorname{cis}\left(n \frac{\pi}{3}\right)$  ..... 2 pontos

Escrever  $-1 = \operatorname{cis}(\pi)$  ..... 2 pontos

Escrever  $\operatorname{cis}\left(n \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}(\pi)$  ..... 1 ponto

Apresentar o valor de  $n$  pedido ( $n = 3$ ) ..... 3 pontos

**2. .... 15 pontos**

Expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**)..... 12 pontos

Valor pedido (210) (**ver nota 2**) ..... 3 pontos

**Nota 1:** Indicam-se, a seguir, possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva classificação a atribuir.

${}^7C_3 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2$  ou  ${}^7C_2 \times {}^5C_3 \times {}^2C_2$  ou  ${}^7C_2 \times {}^5C_2 \times {}^3C_3$

ou  $\frac{7!}{3! \times 2! \times 2!}$  ..... 12 pontos

7! ..... 4 pontos

Outras situações ..... 0 pontos

**Nota 2:** A classificação relativa a esta etapa só é atribuída se a etapa anterior não tiver sido classificada com zero pontos.

**3.1. .... 15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

**1.º processo:**

Expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 12 pontos

Resultado na forma pedida  $\left( P = \frac{10}{19} \right)$  (**ver nota 2**) ..... 3 pontos

**Notas:**

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva classificação a atribuir.

$\frac{10 \times 10 \times 2}{20 \times 19}$  (ou equivalente) ..... 12 pontos

$\frac{10 \times 10}{20 \times 19}$  (ou equivalente) ..... 8 pontos

$\frac{10 \times 10 \times 2}{20 \times 20}$  (ou equivalente) ..... 6 pontos

Outras situações ..... 0 pontos

2. A classificação relativa a esta etapa só é atribuída se a etapa anterior não tiver sido classificada com zero pontos.

**2.º processo:**Justificação para o valor pedido (**ver nota 1**)..... 12 pontosResultado na forma pedida  $\left(P = \frac{10}{19}\right)$  (**ver nota 2**) ..... 3 pontos**Notas:**

- Um exemplo de uma justificação correcta poderá ser:  
«Retirada a primeira bola, seja qual for o resultado, ficamos com dezanove possibilidades equiprováveis de tirar a segunda bola, das quais dez são de cor diferente da primeira.  
A probabilidade pedida é, assim, igual a  $\frac{10}{19}$  .»
- A classificação relativa a esta etapa só é atribuída se a etapa anterior não tiver sido classificada com zero pontos.

**3.2. .... 15 pontos**

A composição deve abordar os seguintes pontos:

- Interpretação de  $P((B \cap C) | A)$ : significa a probabilidade de a segunda bola retirada ter cor amarela e ter número par, sabendo que a primeira bola retirada é verde;
- Explicação do número de casos possíveis: como foi retirada uma bola e não há reposição, existem 19 bolas possíveis para a 2.ª extracção;
- Explicação do número de casos favoráveis: uma vez que a primeira bola retirada é verde, continuam na caixa as 10 bolas amarelas, numeradas de 11 a 20, das quais existem cinco com número par;
- Concluir que a probabilidade é  $\frac{5}{19}$ . De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis (não se exige que o examinando refira a equiprobabilidade dos casos possíveis).

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa, descritos nos critérios gerais, e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa		Níveis*				
		1	2	3		
Níveis**	4	A composição aborda correctamente os quatro pontos.		13	14	15
	3	A composição aborda correctamente apenas três pontos.		9	10	11
	2	A composição aborda correctamente apenas dois pontos.		5	6	7
	1	A composição aborda correctamente apenas um ponto.		1	2	3

\* Descritores apresentados nos critérios gerais.

\*\* Apenas podem ser atribuídas classificações correspondentes a um dos valores constantes do quadro. Não há lugar a classificações intermédias.

4. .... **15 pontos**
- Identificar o declive da asymptota oblíqua do gráfico de  $f (m = 2)$  ..... 2 pontos
- Indicar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$  ..... 2 pontos
- Calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$  ..... 9 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x^2}{x}$  ..... 2 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x)$  ..... 3 pontos
- Indicar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$  ..... 4 pontos
- Concluir que o gráfico da função  $g$  não tem asymptotas oblíquas ..... 2 pontos

- 5.1. .... **15 pontos**
- Referir que a função  $g$  é contínua em  $[0,1; 0,3]$  (**ver nota 1**) ..... 3 pontos
- Calcular  $g(0,1)$  ..... 2 pontos
- Calcular  $g(0,3)$  ..... 2 pontos
- Concluir que  $g(0,1) < 0 < g(0,3)$  (ou referir que  $g(0,1)$  e  $g(0,3)$  têm sinais contrários) ..... 3 pontos
- Concluir o pretendido (**ver nota 2**) ..... 5 pontos

**Notas:**

1. Se o examinando não referir a continuidade da função no intervalo  $[0,1; 0,3]$ , mas afirmar que a função é contínua em todo o seu domínio, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.
2. Se o examinando não referir que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano ou do seu corolário, a classificação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em um ponto.

5.2. .... 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

**1.º processo**

- Escrever a equação  $(e^{2x} + \ln x = 2x)$  ..... 3 pontos
- Representar graficamente a função  $g$  ..... 3 pontos
- Indicar as coordenadas do ponto  $A$  ..... 8 pontos
  - Representar a recta  $y = 2x$  ..... 2 pontos
  - Assinalar o ponto  $A$  de intersecção ..... 2 pontos
  - Escrever as coordenadas aproximadas do ponto  $A$   $(0,3; 0,6)$  .....  $(2 + 2)$  ..... 4 pontos
- Identificar o(s) gráfico(s) (**ver nota**) ..... 1 ponto

**Nota:** Se o examinando identificar apenas um gráfico, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

**2.º processo**

- Escrever a equação  $e^{2x} + \ln x = 2x$  ..... 3 pontos
- Escrever a equação  $e^{2x} + \ln x - 2x = 0$  ..... 1 ponto
- Representar graficamente a função definida por  $y = e^{2x} + \ln x - 2x$  ..... 2 pontos
- Indicar o zero da função anterior ..... 2 pontos
- Representar graficamente a função  $g$  ..... 3 pontos
- Assinalar o ponto  $A$  no gráfico da função  $g$  ..... 1 ponto
- Escrever as coordenadas do ponto  $A$  ..... 2 pontos
- Identificar o(s) gráfico(s) (**ver nota**) ..... 1 ponto

**Nota:** Se o examinando identificar apenas um gráfico, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

6. .... 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

**1.º processo**

- Escrever  $\log_2(x - 1) \geq 1 + \log_2(2 - x)$  ..... 1 ponto
- Resolver a inequação ..... 10 pontos
  - Escrever  $1 = \log_2 2$  ..... 3 pontos
  - Utilizar a propriedade da soma de logaritmos ..... 3 pontos
  - Resolver a inequação  $(x - 1) \geq (4 - 2x)$  ..... 4 pontos
- Indicar a solução da inequação  $f(x) \geq 1 + h(x)$   $\left( S = \left[ \frac{5}{3}, 2 \right] \right)$  ..... 4 pontos

## 2.º processo

- Escrever  $\log_2(x-1) \geq 1 + \log_2(2-x)$  ..... 1 ponto
- Resolver a inequação ..... 10 pontos
- Escrever  $\log_2(x-1) - \log_2(2-x) \geq 1$  ..... 1 ponto
- Utilizar a propriedade da diferença de logaritmos ..... 3 pontos
- Obter a inequação  $\frac{x-1}{2-x} \geq 2$  ..... 2 pontos
- Resolver a inequação  $\frac{x-1}{2-x} \geq 2$  ..... 4 pontos
- Indicar a solução da inequação  $f(x) \geq 1 + h(x)$   $\left( S = \left[ \frac{5}{3}, 2 \right] \right)$  ..... 4 pontos

## 7.1. .... 10 pontos

- Calcular  $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$  ..... 8 pontos
- Escrever  $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (2te^{-0,3t})$  ..... 1 ponto
- Levantar a indeterminação ..... 6 pontos
- Concluir que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$  ..... 1 ponto
- Interpretar o valor do limite no contexto da situação apresentada ..... 2 pontos

## 7.2. .... 15 pontos

- Determinar  $C'(t)$  ( $C'(t) = 2e^{-0,3t} - 0,6te^{-0,3t}$ ) ..... 3 pontos
- Determinar o zero de  $C'$  ..... 3 pontos
- Escrever  $C'(t) = 0$  ..... 1 ponto
- Resolver a equação  $\left( t = \frac{10}{3} \right)$  ..... 2 pontos
- Estudar o sinal de  $C'$  e consequente conclusão, relativamente ao extremo relativo de  $C$ , com recurso a um quadro (**ver nota**) ..... 5 pontos
- Primeira linha do quadro (relativa à variável  $t$ ) ..... 1 ponto
- Sinal de  $C'$  ..... 1 ponto
- Relação entre o sinal de  $C'$  e a monotonia de  $C$  ..... 1 ponto
- Indicar, no quadro, que a função  $C$  tem o seu valor máximo para  $\left( t = \frac{10}{3} \right)$  ..... 2 pontos
- Escrever  $\frac{10}{3} \text{ h} = 3 \text{ h } 20 \text{ min}$  ..... 2 pontos

Escrever a que horas foi registada a concentração máxima (12 h 20 min) ..... 2 pontos

**Nota:** Se o examinando não recorrer a um quadro, mas apresentar uma justificação equivalente, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.