Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase

11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\, \pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\, \pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = \mathrm{x}_1\, \mathrm{p}_1 + \cdots + \mathrm{x}_\mathrm{n}\, \mathrm{p}_\mathrm{n}$

$\sigma = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mu)^2\, \mathrm{p}_1 + \cdots + (\mathrm{x}_\mathrm{n} - \mu)^2\, \mathrm{p}_\mathrm{n}}$

Se X é $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, então:

$\mathrm{P}(\mu - \sigma < \mathrm{X} < \mu + \sigma) \approxeq 0{,}6827$

$\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < \mathrm{X} < \mu + 2\sigma) \approxeq 0{,}9545$

$\mathrm{P}(\mu - 3\sigma < \mathrm{X} < \mu + 3\sigma) \approxeq 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única alternativa correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a alternativa seleccionada.

Não apresente cálculos nem justificações.

1. De um baralho com 40 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus), em que cada naipe contém um Ás, uma Dama, um Valete, um Rei e seis cartas (do Dois ao Sete), foram dadas sucessivamente, ao acaso, seis cartas a um jogador, que as coloca na mão, pela ordem que as recebe.

Qual é a probabilidade de o jogador obter a sequência $2 - 4 - 6 - 7 -$ Dama $-$ Rei, nas cartas recebidas?

(A) $\frac{4^6}{{}^{40}A_6}$ **(B)** $\frac{4^6}{{}^{40}C_6}$ **(C)** $\frac{1}{{}^{40}A_6}$ **(D)** $\frac{1}{{}^{40}C_6}$

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}3$
- $P(B) = 0{,}4$
- $P(A \cup B) = 0{,}5$

(P designa probabilidade.)

Qual é a probabilidade de se realizar A, sabendo que B se realiza?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

3. Considere uma variável aleatória X, cuja distribuição de probabilidades é dada pela tabela seguinte.

x_i	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{k}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{k}{4}$

Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

4. Seja x um número real positivo.

Qual das expressões seguintes é igual a $e^{4\ln x} - 10^{2\log x}$?

($\ln$ designa logaritmo de base e; $\log$ designa logaritmo de base 10.)

(A) $\ln x^4 - \log x^2$ **(B)** $x^4 + x^2$ **(C)** $x^4 - x^2$ **(D)** $\dfrac{\ln x^4}{\log x^2}$

5. Para um certo número real positivo k, é contínua a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(k+x) & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

6. Na figura 1, está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1.

Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência.

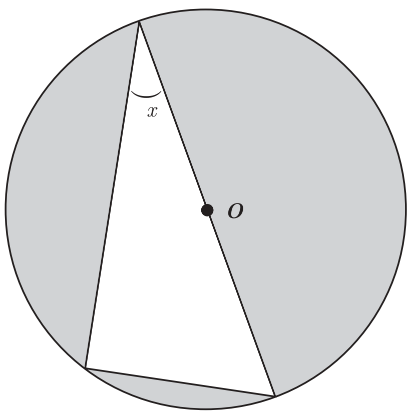


Fig. 1

Qual das expressões seguintes representa, em função de x, a área da parte sombreada?

(A) $\pi - \operatorname{sen}(2x)$ **(B)** $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{sen}(2x)$ **(C)** $\pi - 2\operatorname{sen}(2x)$ **(D)** $\pi - \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{4}$

7. Seja z um número complexo, em que um dos argumentos é $\dfrac{\pi}{3}$.

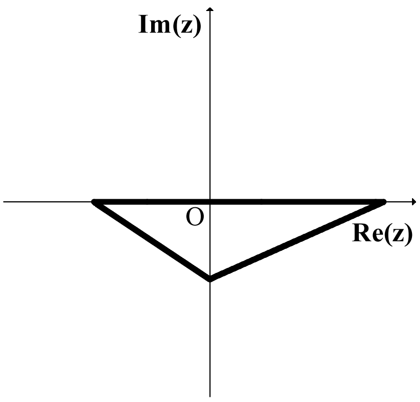
Qual dos valores seguintes é um argumento de $\dfrac{2i}{\overline{z}}$, sendo $\overline{z}$ o conjugado de z ?

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ **(B)** $\dfrac{2}{3}\pi$ **(C)** $\dfrac{5}{6}\pi$ **(D)** $\dfrac{7}{6}\pi$

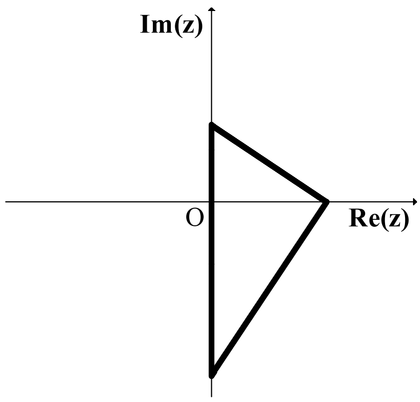
8. Seja b um número real positivo, e $z_1 = bi$ um número complexo.

Em qual dos triângulos seguintes os vértices podem ser as imagens geométricas dos números complexos z_1, $(z_1)^2$ e $(z_1)^3$?

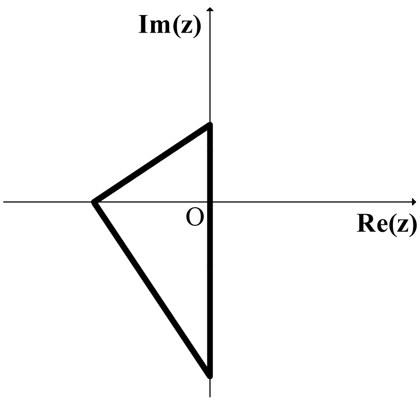
(A)



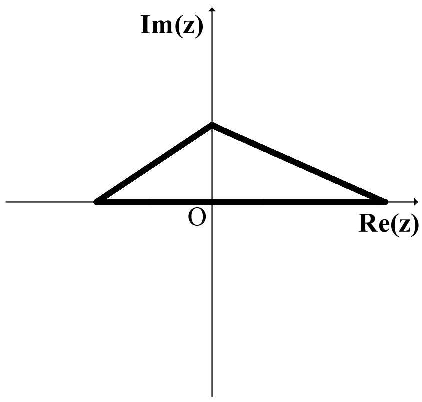
(B)



(C)



(D)



GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \dfrac{i}{1-i} - i^{18}$ e $z_2 = \operatorname{cis}\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)$.

1.1. Determine z_1 na forma trigonométrica, **sem recorrer à calculadora**.

1.2. Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-i\ z_2)^n = -1$.

2. De um bilhete de lotaria sabe-se que o seu número é formado por sete algarismos, dos quais três são iguais a 1, dois são iguais a 4 e dois são iguais a 5 (por exemplo: $1\,5\,5\,1\,4\,1\,4$).

Determine quantos números diferentes satisfazem as condições anteriores.

3. Uma caixa contém bolas, indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 20. As bolas numeradas de 1 a 10 têm cor verde, e as bolas numeradas de 11 a 20 têm cor amarela.

Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente, duas bolas da caixa, não repondo a primeira bola retirada, e em registar a cor das bolas retiradas.

3.1. Determine a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa terem cores diferentes.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3.2. Na mesma experiência aleatória, considere os acontecimentos:

A: «A 1.ª bola retirada é verde.»

B: «A 2.ª bola retirada é amarela.»

C: «O número da 2.ª bola retirada é par.»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P((B \cap C) \mid A)$?

A resposta correcta a esta questão é $P((B \cap C) \mid A) = \dfrac{5}{19}$.

Numa pequena composição, **sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada**, explique o valor dado, começando por interpretar o significado de $P((B \cap C) \mid A)$, no contexto da situação descrita e fazendo referência:

- à Regra de Laplace;
- ao número de casos possíveis;
- ao número de casos favoráveis.

4. Sejam f e g duas funções, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$;
- a função g é definida por $g(x) = f(x) + x^2$.

Prove que o gráfico de g não tem assimptotas oblíquas.

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = e^{2x} + \ln x$.

5.1. Mostre, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0{,}1;\ 0{,}3[$.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos.

5.2. O gráfico de g contém um único ponto A com abcissa pertencente ao intervalo $]0,\ 2]$ e cuja ordenada é igual ao dobro da abcissa.

Traduza esta situação por meio de uma equação.

Resolva a equação, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Indique as coordenadas do ponto A, com aproximação às décimas.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

Assinale o ponto A em que se baseou para dar a sua resposta.

6. Sejam as funções f e h, de domínios $]1, +\infty[$ e $]-\infty, 2[$, respectivamente, definidas por $f(x) = \log_2 (x - 1)$ e por $h(x) = \log_2 (2 - x)$.

Determine, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, o conjunto solução da condição $f(x) \geq 1 + h(x)$.

Apresente o resultado sob a forma de intervalo real.

7. Num certo dia, o Fernando esteve doente e tomou, às 9 horas da manhã, um medicamento cuja concentração $C(t)$ no sangue, em $\mathrm{mg/l}$, t horas após o medicamento ter sido ministrado, é dada por

$$C(t) = 2t\,e^{-0,3t} \qquad (t \geq 0)$$

Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

7.1. Calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$ e interprete esse valor no contexto da situação apresentada.

7.2. Determine a que horas se verificou a concentração máxima.

Apresente o resultado em horas e minutos, arredondando estes às unidades.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I	(8 × 5 pontos)		**40 pontos**
GRUPO II			**160 pontos**
1.		30 pontos	
1.1.	15 pontos		
1.2.	15 pontos		
2.		15 pontos	
3.		30 pontos	
3.1.	15 pontos		
3.2.	15 pontos		
4.		15 pontos	
5.		30 pontos	
5.1.	15 pontos		
5.2.	15 pontos		
6.		15 pontos	
7.		25 pontos	
7.1.	10 pontos		
7.2.	15 pontos		
TOTAL			**200 pontos**