Ministério da Educação

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase

12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3} \pi r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, \ k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approxeq 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approxeq 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approxeq 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única alternativa correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a alternativa seleccionada.

Não apresente cálculos nem justificações.

1. A Maria gravou nove CD, sete com música *rock* e dois com música popular, mas esqueceu-se de identificar cada um deles.

Qual é a probabilidade de, ao escolher dois CD ao acaso, um ser de música *rock* e o outro ser de música popular?

(A) $\frac{7}{36}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{2}{9}$ **(D)** $\frac{7}{18}$

2. Admita que um estudante tem de realizar dois testes no mesmo dia. A probabilidade de ter classificação positiva no primeiro teste é $0{,}7$, a de ter classificação positiva no segundo teste é $0{,}8$, e a de ter classificação negativa em ambos os testes é $0{,}1$.

Qual é a probabilidade de o estudante ter negativa no segundo teste, sabendo que teve negativa no primeiro teste?

(A) $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{1}{7}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

3. Uma certa linha do Triângulo de Pascal é constituída por todos os elementos da forma ${}^{14}C_{\mathrm{p}}$.

Escolhido, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser o número 14?

(A) $\frac{1}{15}$ **(B)** $\frac{1}{14}$ **(C)** $\frac{2}{15}$ **(D)** $\frac{4}{15}$

4. Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+1}$.

Qual dos pontos seguintes pertence ao gráfico de f ?

($\ln$ designa logaritmo de base e.)

(A) $(-1,\ 0)$ **(B)** $(\ln 2,\ 2e)$ **(C)** $(\ln 5,\ 6)$ **(D)** $(-2,\ e)$

5. Na figura 1, estão representadas parte do gráfico de uma função f, de domínio $[-3,\ +\infty[$, e parte da recta r, que é a única assimptota do gráfico de f.

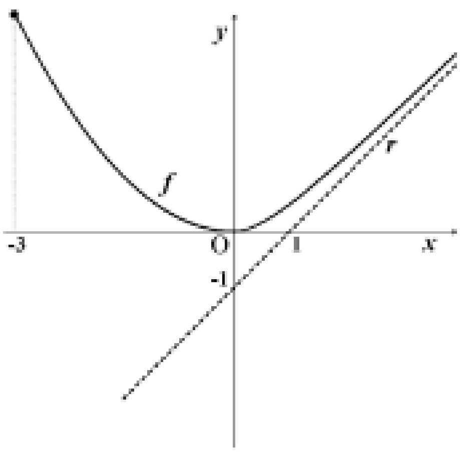


Fig. 1

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

6. Na figura 2, está representada parte do gráfico de uma função f', derivada de f, ambas de domínio $\mathbb{R}$, em que o eixo Ox é uma assimptota do gráfico de f'.

Seja a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) + x$.

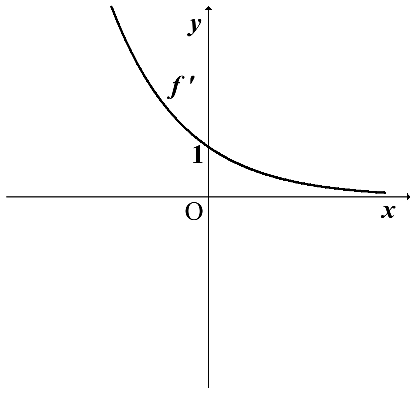
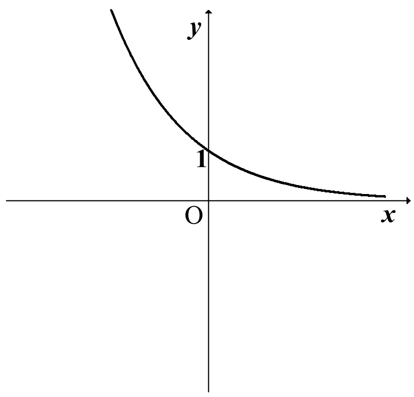


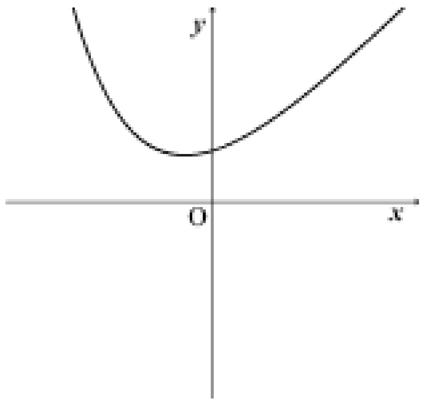
Fig. 2

Qual das figuras seguintes pode representar parte do gráfico da função g', derivada de g ?

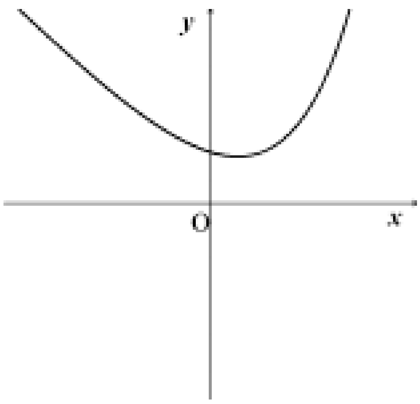
(A)



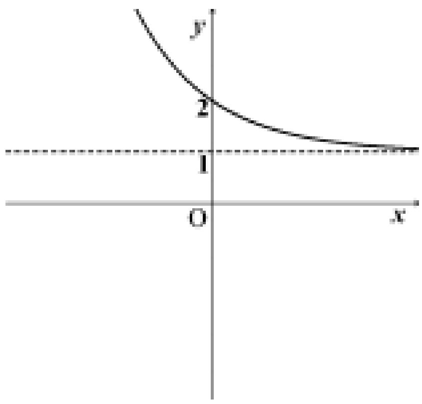
(B)



(C)



(D)



7. Seja k um número real, e $z_1 = (k - i)\ (3 - 2i)$ um número complexo.

Qual é o valor de k, para que z_1 seja um número imaginário puro?

(A) $-\dfrac{3}{2}$ **(B)** $-\dfrac{2}{3}$ **(C)** $\dfrac{2}{3}$ **(D)** $\dfrac{3}{2}$

8. Na figura 3, está representada uma região do plano complexo. O ponto A tem coordenadas $(2,\ -1)$.

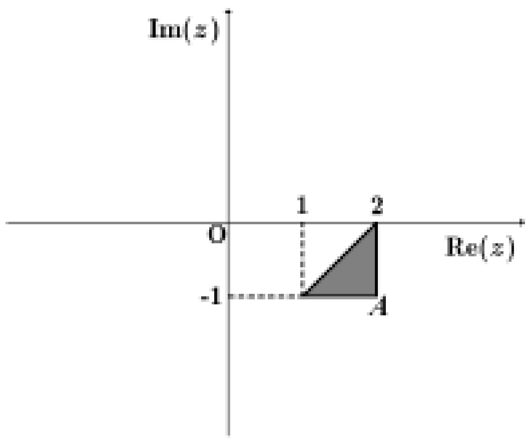


Fig. 3

Qual das condições seguintes define em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $\left|z-1\right| \geq \left|z-(2-i)\right| \wedge \mathrm{Re}(z) \leq 2 \wedge \mathrm{Im}(z) \geq -1$

(B) $\left|z-1\right| \leq \left|z-(2-i)\right| \wedge \mathrm{Re}(z) \leq 2 \wedge \mathrm{Im}(z) \geq -1$

(C) $\left|z+1\right| \geq \left|z-(2+i)\right| \wedge \mathrm{Re}(z) \leq 2 \wedge \mathrm{Im}(z) \geq -1$

(D) $\left|z-1\right| \geq \left|z-(2-i)\right| \wedge \mathrm{Im}(z) \leq 2 \wedge \mathrm{Re}(z) \geq -1$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. No conjunto dos números complexos, seja $z = \dfrac{\left(\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)^7 + (2+i)^3}{4\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

Determine z na forma algébrica, **sem recorrer à calculadora**.

2. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w, cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto A, situado no 1.º quadrante. Sejam os pontos B e C, respectivamente, as imagens geométricas de $\bar{w}$ (conjugado de w) e de $(-w)$.

Sabe-se que $\overline{BC} = 8$ e que $|w| = 5$.

Determine a área do triângulo $[ABC]$.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$.

Mostre que $1 - P(A \mid B) \times P(B) - P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{A})$.

(P designa probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A, e $P(A \mid B)$ designa a probabilidade de A dado B.)

4. Considere um baralho com 52 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus).

Em cada naipe, há um Ás, três figuras (uma Dama, um Valete, um Rei) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).

4.1. Retiram-se cinco cartas do baralho, que são colocadas lado a lado, em cima de uma mesa, segundo a ordem pela qual vão sendo retiradas.

Quantas sequências se podem formar com as cinco cartas retiradas, caso a primeira carta e a última carta sejam ases, e as restantes sejam figuras?

4.2. Admita que, num jogo, cada jogador recebe três cartas, por qualquer ordem.

Qual é a probabilidade de um determinado jogador receber exactamente dois ases?

Uma resposta correcta a esta questão é $\dfrac{{}^{4}C_2 \times 48}{{}^{52}C_3}$.

Numa pequena composição, justifique esta resposta, fazendo referência:

- à Regra de Laplace;
- ao número de casos possíveis;
- ao número de casos favoráveis.

5. Seja f a função, de domínio $[0, \frac{\pi}{2}]$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(2x)\ \cos x$.

5.1. Determine, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 0.

5.2. No domínio indicado, determine, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo $[ABC]$, em que:

- A é o ponto do gráfico da função f cuja ordenada é máxima;
- B e C são os pontos de intersecção do gráfico da função f com a recta de equação $y = 0{,}3$.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

Desenhe o triângulo $[ABC]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

6. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

6.1. Estude a continuidade de h no domínio $\mathbb{R}$.

6.2. Estude a função h quanto à existência de assimptotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

7. Numa certa zona de cultivo, foi detectada uma doença que atinge as culturas. A área afectada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir.

Admita que a área, em hectares, afectada pela doença, é dada, em função de t, por

$$A(t) = 2 - t + 5\ln(t+1)$$

sendo $t\,(0 \leq t < 16)$ o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detectada essa doença.

Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

7.1. Quando a doença foi detectada, já uma parte da área de cultivo estava afectada. Passada uma semana, a área de cultivo afectada pela doença aumentou.

De quanto foi esse aumento?

Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

7.2. Determine a área máxima afectada pela doença.

Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I	(8 × 5 pontos)	**40 pontos**
GRUPO II		**160 pontos**
1.	15 pontos	
2.	15 pontos	
3.	15 pontos	
4.	30 pontos	
4.1. 15 pontos		
4.2. 15 pontos		
5.	30 pontos	
5.1. 15 pontos		
5.2. 15 pontos		
6.	30 pontos	
6.1. 15 pontos		
6.2. 15 pontos		
7.	25 pontos	
7.1. 10 pontos		
7.2. 15 pontos		
TOTAL		**200 pontos**