

Proposta de Resolução do Exame do 12º ano Matemática A (Prova 635)

2009 – 2ª Fase

GRUPO I

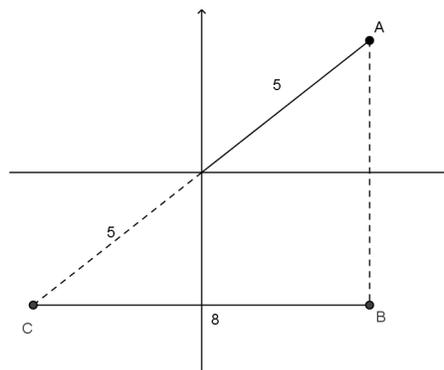
Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	D	C	C	B	C	D	C	A
Versão 2	A	B	B	C	B	A	B	D

GRUPO II

1.

$$z = \frac{\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7 + (2+i)^3}{4\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{7}\right) + (2+i)(2+i)^2}{-4i} = \frac{\operatorname{cis}\pi + (2+i)(3+4i)}{-4i} = \frac{-1+2+11i}{-4i} = \frac{(1+11i) \times i}{-4i \times i} = \frac{i-11}{4} = -\frac{11}{4} + \frac{1}{4}i.$$

2.



$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$A = \frac{8 \times 6}{2} = 24$$

A área do triângulo [ABC] é de 24 unidades

$$3. 1 - P(A|B) \times P(B) - P(A \cap \bar{B}) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \times P(B) - P(A \cap \bar{B}) = 1 - [P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})] =$$

$$= 1 - P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})], \text{ dado que os conjuntos } A \cap B \text{ e } A \cap \bar{B} \text{ são disjuntos.}$$

Logo, $1 - P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] = 1 - P[A \cap (B \cup \bar{B})] = 1 - P(A) = P(\bar{A})$, tal como se pretendia.

4.1. O número de sequências nas condições enunciadas é dado $4 \times 12 \times 11 \times 10 \times 3 = 15840$

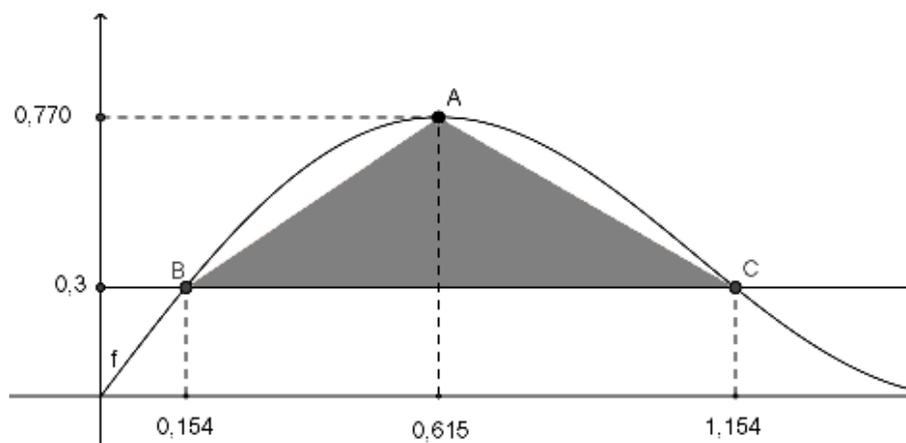
4.2. Como o baralho tem 52 cartas, o número de subconjuntos de três cartas que dele se podem retirar é dado por ${}^{52}C_3$.

O número de casos favoráveis é o número de subconjuntos de 3 cartas constituídos por dois dos 4 ases e por uma das 48 cartas restantes, que não são ases. Esse número de subconjuntos é dado por ${}^4C_2 \times 48$.

Como se trata de acontecimentos equiprováveis, a probabilidade pretendida pode obter-se aplicando a Regra de Laplace, isto é, calculando o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis que, neste caso, é $\frac{{}^4C_2 \times 48}{{}^{52}C_3}$.

5.1. $f'(x) = 2\cos(2x) \times \cos x - \sin x \times \sin(2x)$. Como $f'(0) = 2$, temos que o declive da recta tangente é 2. Sendo $f(0) = 0$, a ordenada na origem é zero e consequentemente a equação reduzida da recta pretendida é $y = 2x$.

5.2.



$$A = \frac{(1,15 - 0,15) \times (0,77 - 0,3)}{2} = \frac{0,47}{2} \approx 0,2$$

A área do triângulo pedido é de 0,2 unidades.

6.1. h é contínua em \mathbb{R}^+ porque para $a > 0$ temos que $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{x^2 + 4} - x) = \sqrt{a^2 + 4} - a = h(a)$ e $h(a)$ é real. h é também contínua em \mathbb{R}^- porque para $b < 0$ temos que $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{e^{2b}-1}{b} = h(b)$ e $h(b)$ é real.

A função h será contínua para $x = 0$ se existir $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ e se $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = 2$.

Haverá $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ se existirem e forem iguais os limites laterais em zero.

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + 4} - x) = \sqrt{0 + 4} - 0 = 2$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} \times 2 = 1 \times 2 = 2.$$

Deste modo, a função h é contínua em \mathbb{R} .

6.2. Como a função tem domínio \mathbb{R} e é contínua em \mathbb{R} não existem assíptotas verticais.

Quanto às assíptotas horizontais, teremos de estudar $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x), \text{ que conduz a uma indeterminação do tipo } \infty - \infty.$$

$$\text{Ora, } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{(\sqrt{x^2+4}+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4-x^2}{(\sqrt{x^2+4}+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{(\sqrt{x^2+4}+x)} = 0,$$

dado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} + x) = +\infty$.

Assim, a recta de equação $y = 0$ é assíptota horizontal do gráfico da função quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}-1}{x} = 0, \text{ visto que } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 1 = 0 - 1 = -1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Assim, a recta de equação $y = 0$ é também assíptota horizontal do gráfico da função quando $x \rightarrow -\infty$.

7.1. Sendo $A(0) = 2 - 0 + 5 \times \ln(0 + 1) = 2$ e $A(1) = 2 - 1 + 5 \ln(1 + 1) = 1 + 5 \ln 2$, temos que $A(1) - A(0) = 1 + 5 \ln(2) - 2 = 5 \ln(2) - 1 \simeq 2,47$.

O aumento da área de cultivo afectada ao fim da primeira semana foi de aproximadamente 2,47 ha.

7.2. $A'(t) = -1 + \frac{5}{t+1}$

$A'(t) = 0 \Leftrightarrow t + 1 = 5 \Leftrightarrow t = 4$

t	0		4		16
A'	4	+	0	-	<i>n. d.</i>
A			Máx		

$A(4) = 2 - 4 + 5 \ln(4 + 1) \approx 6,05$

A área máxima afectada pela doença é de aproximadamente 6,05 *ha*.