

Proposta de Resolução do Exame do 12º ano Matemática A (Prova 635)

2010 - 1ª Fase

Grupo I

1. Como A e B são acontecimentos incompatíveis, $P(A \cap B) = 0$ e
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Ou seja, de acordo com os dados do enunciado,
 $70\% = 30\% + P(B) \Leftrightarrow P(B) = 40\%$

A opção correcta é:

Versão 1: B

Versão 2: C

2. Como se trata de uma única acção de formação, podem seleccionar-se aleatoriamente ${}^{10}C_3$ grupos de três trabalhadores, que são os casos possíveis. Como os três amigos constituem um único grupo a probabilidade solicitada é $\frac{1}{{}^{10}C_3}$.

A opção correcta é:

Versão 1: C

Versão 2: B

3. Como se trata de uma distribuição de probabilidade, a soma das probabilidades tem que ser 1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 2a + a &= 1 \Leftrightarrow 3a = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 3a &= \frac{10}{10} - \frac{2}{10} - \frac{5}{10} \\ \Leftrightarrow 3a &= \frac{3}{10} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

Logo $P(X = 2) = 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$

Pelo que $P(X = 0) = P(X = 2)$

A opção correcta é:

Versão 1: B

Versão 2: C

4. Como f é uma função afim, $f''(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Sabe-se que } h''(x) &= f''(x) + (e^x)'' \\ &= 0 + e^x \\ &= e^x \end{aligned}$$

Das quatro representações gráficas apresentadas a única que pode representar a função $h''(x) = e^x$ é:

Versão 1: A

Versão 2: D

5. Da observação da parte do gráfico da função f apresentada, e pelo facto da recta de equação $x = 1$ ser assíntota do seu gráfico, podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

$$\text{Logo } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} (3x)}{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} = \frac{3}{+\infty} = 0.$$

A opção correcta é:

Versão 1: C

Versão 2: B

6. Se considerarmos $[OB]$ como a base do triângulo, temos que $\overline{OB}=1$, sendo a altura a medida correspondente à ordenada de A, isto é, 5. Pelo que a área do triângulo é

$$\frac{1 \times 5}{2} = \frac{5}{2}$$

A opção correcta é:

Versão 1: A

Versão 2: D

7. Um número complexo w é um imaginário puro se $\arg(w) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Logo } z \text{ é um imaginário puro se } \frac{\pi}{8} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Para } k = 1, \theta = \frac{5\pi}{8}$$

A opção correcta é:

Versão 1: D

Versão 2: A

8. Como todos os números complexos que têm a sua imagem geométrica na região representada na figura têm módulo superior a 3 e nenhum deles é imaginário puro temos que:

A opção correcta é:

Versão 1: B

Versão 2: C

Grupo II

1.

1.1.

$$w = \frac{3-i \times (z_1)^7}{z_2} = \frac{3-i \times \left(\text{cis} \frac{\pi}{7}\right)^7}{2-i} = \frac{3-i \times (\text{cis} \pi)}{2-i} = \frac{3-i \times (-1)}{2-i} = \frac{3+i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} =$$

$$= \frac{6+3i+2i+i^2}{4-i^2} = \frac{6+5i-1}{5} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

Na forma trigonométrica: $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\left. \begin{array}{l} \tan \theta = 1 \\ \theta \in 1^\circ \text{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Então: $w = 1+i = \sqrt{2} \text{cis} \frac{\pi}{4}$

1.2.

$$|z_1 + z_2|^2 = \left| \text{cis} \left(\frac{\pi}{7} \right) + 2+i \right|^2 = \left| \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{7} \right) + 2+i \right|^2 =$$

$$= \left| \left(\cos \left(\frac{\pi}{7} \right) + 2 \right) + \left(\sin \left(\frac{\pi}{7} \right) + 1 \right) i \right|^2 = \left(\sqrt{\left(\cos \left(\frac{\pi}{7} \right) + 2 \right)^2 + \left(\sin \left(\frac{\pi}{7} \right) + 1 \right)^2} \right)^2 =$$

$$= \cos^2 \left(\frac{\pi}{7} \right) + 4 \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) + 4 + \sin^2 \left(\frac{\pi}{7} \right) + 2 \sin \left(\frac{\pi}{7} \right) + 1 =$$

$$= \cos^2 \left(\frac{\pi}{7} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{7} \right) + 4 \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) + 2 \sin \left(\frac{\pi}{7} \right) + 5 =$$

$$= 6 + 4 \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) + 2 \sin \left(\frac{\pi}{7} \right)$$

c.q.d.

2.

2.1. Sejam os acontecimentos:

A: Ter computador portátil

B: Não saber o nome do director

Sabemos que:

$$P(A) = \frac{1}{5} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(A|B) = \frac{1}{3}$$

Pretendemos determinar $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$$\text{Ora: } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Pelo que:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = 1 - \frac{6+15-5}{30} = 1 - \frac{16}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

2.2.

N.º de alunos com computador portátil (C.P.): $\frac{1}{5} \times 150 = 30$ e portanto 120 não têm C.P.

Logo a comissão será constituída por 4 dos 30 alunos com C.P. e 2 dos 120 sem C.P., pelo que o número de comissões diferentes é dado por:

$${}^{30}C_4 \times {}^{120}C_2 = 27405 \times 7140 = 195671700$$

3.

Nesta experiência aleatória todos os acontecimentos elementares são equiprováveis pelo que se poderá utilizar a regra de Laplace, consistindo esta no quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

Nesta experiência, retirar simultaneamente duas bolas do saco é o mesmo que retirar, sucessivamente, duas bolas do saco, sem reposição.

Tratando-se de um saco que contém 18 bolas indistinguíveis ao tacto, qualquer uma das 18 bolas poderá sair com qualquer uma das 17 restantes. Assim, o número de casos possíveis será igual a 18×17 .

Para que possamos obter um par de bolas da mesma cor, teremos que retirar 2 bolas azuis ou 2 bolas vermelhas. Para saírem 2 bolas azuis teremos que tirar qualquer uma das 12 bolas azuis com qualquer uma das 11 restantes da mesma cor. Para saírem 2 bolas vermelhas teremos que tirar qualquer uma das 6 bolas vermelhas com qualquer uma das 5 restantes da mesma cor. Assim, o número de casos favoráveis à saída de duas bolas da mesma cor será igual a $12 \times 11 + 6 \times 5$.

Conclui-se, então, que a probabilidade das duas bolas extraídas serem da mesma cor é igual a $\frac{12 \times 11 + 6 \times 5}{18 \times 17}$.

4.

4.1.

$$\begin{aligned} N(t) &= 8 \log_4 (3t+1)^3 - 8 \log_4 (3t+1) = 8 \times 3 \log_4 (3t+1) - 8 \log_4 (3t+1) = \\ &= 24 \log_4 (3t+1) - 8 \log_4 (3t+1) = 16 \log_4 (3t+1) \end{aligned}$$

Para qualquer $t \in [0,5]$ c.q.d.

4.2.

2400 = 24 centenas

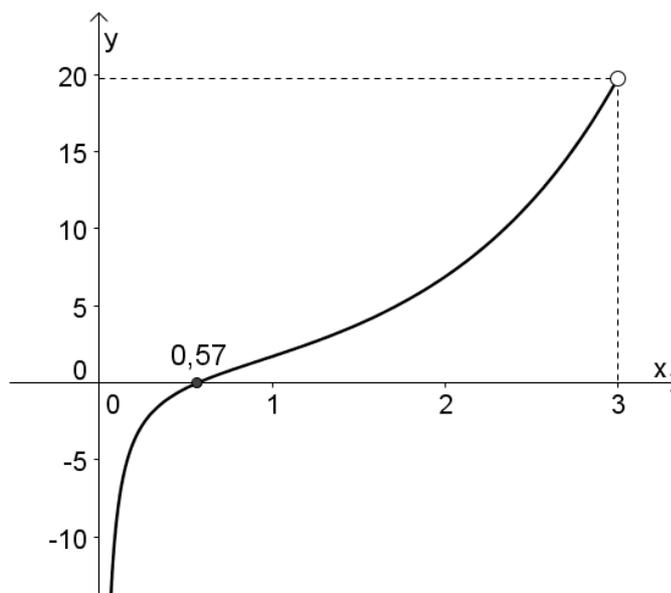
$$\begin{aligned} N(t) = 24 &\Leftrightarrow 16 \log_4 (3t+1) = 24 \Leftrightarrow \log_4 (3t+1) = \frac{24}{16} \Leftrightarrow \log_4 (3t+1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3t+1 = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 3t+1 = \sqrt{64} \Leftrightarrow 3t = 8-1 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3} \Leftrightarrow t = 2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$t = 2h \ 20m$$

Pelo que, para vender 2400 bilhetes foi necessário, 2h e 20 minutos.

5.

Usando as capacidades gráficas da calculadora obtemos o gráfico de $f'(x)$



Da análise do gráfico podemos tirar as seguintes conclusões:

	0		0,57		3
$f'(x)$	n.d.	-	0	+	n.d.
$f(x)$	n.d.	\swarrow	Min.	\searrow	n.d.

A função f é decrescente em $]0 ; 0,57[$ e é crescente em $]0,57 ; 3[$.

f admite um mínimo absoluto para $x \approx 0,57$

6.

6.1.

A existir uma assíntota oblíqua, esta terá que ser quando $x \rightarrow -\infty$, uma vez que o domínio da função é $]-\infty, 2\pi]$. Para que a recta de equação $y = ax + b$ seja assíntota do gráfico de f , tem que se verificar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [ax + b + e^x - ax - b] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, fica demonstrado o que se pretende.

6.2.

Para que a função f seja contínua para $x = 0$, tem que se verificar:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b + e^x) = a \times 0 + b + e^0 = b + 1 \quad (1)$
- $f(0) = a \times 0 + b + e^0 = b + 1 \quad (2)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \text{sen}(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(2x)}{x} = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} =$
 $= 1 - 2 \times 1 = 1 - 2 = -1 \quad (3)$

De (1), (2) e (3) tem-se que: $b + 1 = -1 \Leftrightarrow b = -2$

7.

7.1.

O triângulo [OAB] é rectângulo em B porque $\sphericalangle OBA$ é inscrito numa semi-circunferência.

O perímetro do triângulo é dado por: $P = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB}$.

Ora:

- $\overline{OA} = 2$
- $\cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2 \cos \alpha$
- $\text{sen} \alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2 \text{sen} \alpha$

Assim: $f(\alpha) = 2 + 2 \cos \alpha + 2 \text{sen} \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 2(1 + \cos \alpha + \text{sen} \alpha)$

c.q.d.

7.2.

Para determinar o maximizante da função, calcula-se o zero da função derivada.

$$f'(\alpha) = 2(-\text{sen} \alpha + \cos \alpha), \text{ para } \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Pelo que: $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2(-\sin\alpha + \cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sin\alpha$

Atendendo a que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que, necessariamente, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f(\alpha)$	n.d.		Máx.		n.d.

Logo, o valor de α para o qual o perímetro do triângulo [OAB] é máximo é $\frac{\pi}{4}$.