
Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase

13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

VERSÃO 1

Página em branco

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova. A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$

(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cdot \text{cos} b + \text{sen} b \cdot \text{cos} a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cdot \text{cos} b - \text{sen} a \cdot \text{sen} b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg} a + \text{tg} b}{1 - \text{tg} a \cdot \text{tg} b}$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$

$n\sqrt{\rho \text{cis } \theta} = n\sqrt{\rho} \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k \in \{0, \dots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Os medicamentos produzidos num laboratório são embalados em caixas de igual aspecto exterior e indistinguíveis ao tacto. Um lote contém dez caixas de um medicamento X e vinte caixas de um medicamento Y. Desse lote, retiram-se, ao acaso, simultaneamente, quatro caixas para controlo de qualidade.

Qual é a probabilidade de as caixas retiradas serem todas do medicamento Y?

- (A) $\frac{10 C_4}{30 C_4}$ (B) $\frac{20 C_4}{30 C_4}$ (C) $\frac{4}{30 C_4}$ (D) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$2a$	a	b	b	b	$\frac{1}{10}$

Sabe-se que:

- a e b são números reais
- $P(X \leq 1) = 3P(X = 5)$

Qual é o valor de b ?

- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{4}{15}$ (C) $\frac{7}{30}$ (D) $\frac{1}{5}$

3. Seja a um número real positivo e seja X uma variável aleatória com distribuição Normal $N(0, 1)$

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 0$

(B) $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$

(C) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 1$

(D) $P(X \leq a) = P(X > a)$

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f , de grau 4.

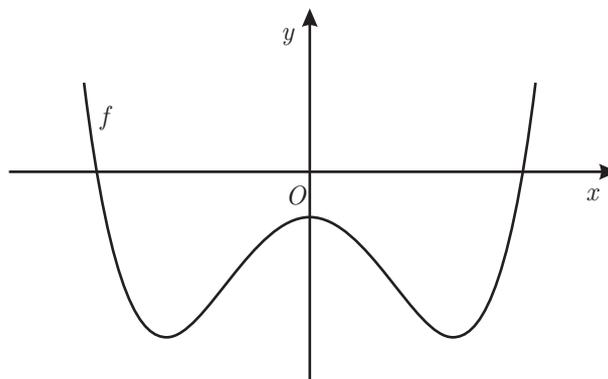


Figura 1

Qual das expressões seguintes pode definir a função f'' , segunda derivada de f ?

(A) $(x - 3)^2$

(B) $(x + 3)^2$

(C) $9 - x^2$

(D) $x^2 - 9$

5. Para um certo número real positivo, k , a função g definida em \mathbb{R} por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{3x} & \text{se } x > 0 \\ \ln(k-x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{é contínua.}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) $\sqrt[3]{e}$ (B) e^3 (C) $\frac{e}{3}$ (D) $3e$

6. Na Figura 2, está representado, num referencial o. n. xOy , o círculo trigonométrico.

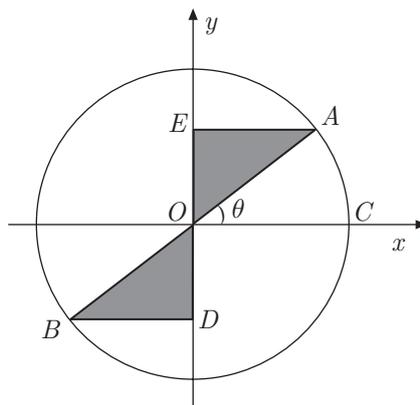


Figura 2

Sabe-se que:

- C é o ponto de coordenadas $(1, 0)$
- os pontos D e E pertencem ao eixo Oy
- $[AB]$ é um diâmetro do círculo trigonométrico
- as rectas EA e BD são paralelas ao eixo Ox
- θ é a amplitude do ângulo COA
- $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

Qual das expressões seguintes dá o perímetro da região sombreada na Figura 2?

- (A) $2(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)$
- (B) $\cos \theta + \operatorname{sen} \theta$
- (C) $2(1 + \cos \theta + \operatorname{sen} \theta)$
- (D) $1 + \cos \theta + \operatorname{sen} \theta$

7. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, a sombreado, um sector circular.

Sabe-se que:

- o ponto A é a imagem geométrica do número complexo $-\sqrt{3} + i$
- o ponto B tem abcissa negativa, ordenada nula, e pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a \overline{OA}

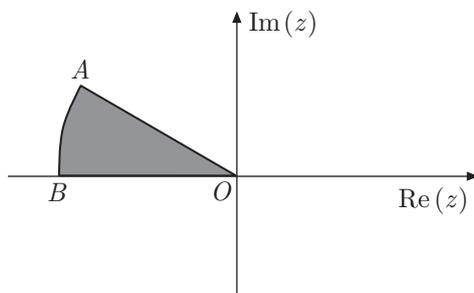


Figura 3

Qual das condições seguintes define, em \mathbb{C} , a região a sombreado, incluindo a fronteira?

(Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$)

- (A) $|z| \leq 2 \wedge \frac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \pi$
- (B) $|z| \leq 2 \wedge \frac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$
- (C) $|z| \leq 4 \wedge \frac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \pi$
- (D) $|z| \leq 4 \wedge \frac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$

8. Na Figura 4, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de seis números complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6

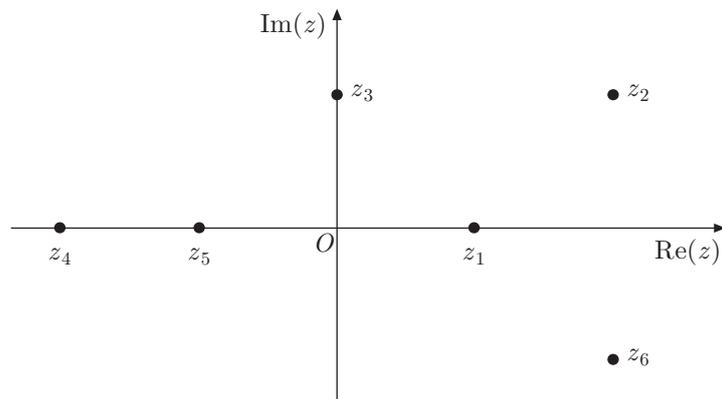


Figura 4

Qual é o número complexo que pode ser igual a $(z_2 + z_4) \times i$?

- (A) z_1
- (B) z_3
- (C) z_5
- (D) z_6

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

Resolva os dois itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

1.1. Considere $z_1 = 1 + 2i$ e $w = \frac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$, com $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

Determine o valor de b para o qual w é um número real.

1.2. Seja z um número complexo tal que $|z| = 1$

Mostre que $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$

2. A MatFinance é uma empresa de consultoria financeira.

2.1. Dos funcionários da MatFinance, sabe-se que:

- 60% são licenciados;
- dos que são licenciados, 80% têm idade inferior a 40 anos;
- dos que não são licenciados, 10% têm idade inferior a 40 anos.

Determine a probabilidade de um desses funcionários, escolhido ao acaso, ser licenciado, sabendo que tem idade não inferior a 40 anos.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Considere o problema seguinte.

«Foi pedido a 15 funcionários da MatFinance que se pronunciassem sobre um novo horário de trabalho.

Desses 15 funcionários, 9 estão a favor do novo horário, 4 estão contra, e os restantes estão indecisos. Escolhe-se, ao acaso, 3 funcionários de entre os 15 funcionários considerados.

De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos os 3 funcionários, de forma que pelo menos 2 dos funcionários escolhidos estejam a favor do novo horário de trabalho?»

Apresentam-se, em seguida, duas respostas.

Resposta I: ${}^{15}C_3 - {}^6C_3$

Resposta II: $6 \times {}^9C_2 + {}^9C_3$

Apenas uma das respostas está correcta.

Elabore uma composição na qual:

- identifique a resposta correcta;
- explique um raciocínio que conduza à resposta correcta;
- proponha uma alteração na expressão correspondente à resposta incorrecta, de modo a torná-la correcta;
- explique, no contexto do problema, a razão da alteração proposta.

3. Na estufa de um certo jardim botânico, existem dois lagos aquecidos, o lago A e o lago B . Às zero horas do dia 1 de Março de 2010, cada lago recebeu uma espécie diferente de nenúfares, a saber, *Victoria amazonica* e *Victoria cruziana*.

$N_A(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago A , t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria amazonica* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_A(t) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2t}} \quad \text{com } t \geq 0$$

$N_B(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago B , t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria cruziana* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_B(t) = \frac{150}{1 + 50 \times e^{-0,4t}} \quad \text{com } t \geq 0$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

3.1. Como foi referido, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, o lago A recebeu um certo número de nenúfares da espécie *Victoria amazonica*. Decorridos 7 dias, esse número aumentou.

Determine de quanto foi esse aumento.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

3.2. Determine quantos dias foram necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A fosse igual ao número de nenúfares existentes no lago B .

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

4. Considere a função f , de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = e^{2x} + \cos x - 2x^2$

Sabe-se que:

- B é um ponto do gráfico de f
- a recta de equação $y = 8x$ é paralela à recta tangente ao gráfico de f no ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto B

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

5. Considere a função f , de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{x + 1}{\ln(x + 1)} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.1. Estude f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

5.2. Mostre, sem resolver a equação, que $f(x) = -3$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]0, \frac{1}{2}\right[$

5.3. Estude f quanto à monotonia em $]2, +\infty[$

6. Para a , b e n , números reais positivos, considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = a \cos(nx) + b \sin(nx)$

Seja f'' a segunda derivada da função f

Mostre que $f''(x) + n^2 f(x) = 0$, para qualquer número real x

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

.....(8 × 5 pontos).....	40 pontos
	<hr/>
	40 pontos

GRUPO II

1.		
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.		
2.1.	20 pontos
2.2.	15 pontos
3.		
3.1.	10 pontos
3.2.	15 pontos
4.	15 pontos
5.		
5.1.	15 pontos
5.2.	10 pontos
5.3.	15 pontos
6.	15 pontos
		<hr/>
		160 pontos
		<hr/>
TOTAL	200 pontos