Proposta de Resolução do Exame Nacional de Matemática A

Cód. 635 - 1ª Fase, 21 de Junho 2012

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	D	C	B	A	C	A	C
Versão 2	C	B	D	B	C	A	D	A

1.

$P(\overline{A})=\frac{7}{10}$ $\qquad$ $P(A)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}=\frac{3}{10}+P(B)-\frac{3}{10}P(B)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}P(B)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{20}\times\frac{10}{7}=P(B)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(B)=\frac{90}{140}=\frac{9}{14}$$

2.

$$P=1-\frac{2\times 6!}{7!}=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

3.

${}^{12}C_7$: distribuição dos 7 copos brancos pelos 12 compartimentos

${}^{5}A_3$: distribuição dos 3 copos de cores distintas pelos restantes 5 compartimentos

$${}^{12}C_7\times{}^{5}A_3$$

4.

$f(x)=e^{x}-3$

$f(x)=-x-\frac{3}{2}\Leftrightarrow e^{x}-3=-x-\frac{3}{2}\Leftrightarrow e^{x}-3+x+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x}+x-\frac{3}{2}=0$

Seja $g(x)=e^{x}+x-\frac{3}{2}$. Como $g(x)$ é contínua em IR e atendendo a que:

$g(0)<0\ \ ;\ g\left(\frac{1}{5}\right)<0\ \ ;\ g\left(\frac{1}{4}\right)>0\ \ ;\ g\left(\frac{1}{3}\right)>0\ \ ;\ g(1)>0$

Então: $g\left(\frac{1}{5}\right)\times g\left(\frac{1}{4}\right)<0$, pelo que $f(x)=-x-\frac{3}{2}$ tem pelo menos um zero em $\left]\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right[$.

5.

Uma vez que $f(x)$ é contínua para $x<a$ e para $x>a$, para assegurar a continuidade em IR temos que verificar: $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=f(a)$

$\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to a^{-}}\left[\log_{3}\left(-x-\frac{1}{3}\right)\right]=\log_{3}\left(-a-\frac{1}{3}\right)$

$\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to a^{+}} g(a)=2$

$f(a)=g(a)=2$

Assim, temos: $\log_{3}\left(-a-\frac{1}{3}\right)=2\Leftrightarrow -a-\frac{1}{3}=3^{2}\Leftrightarrow a=-\frac{1}{3}-9\Leftrightarrow a=-\frac{28}{3}$

6.

$f''(-3)>0$

7.

Na forma trigonométrica: $3i=3cis\frac{\pi}{2}$

$\frac{\rho cis\theta}{3cis\frac{\pi}{2}}=\frac{\rho}{3}cis\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$

Assim, temos que: $\frac{\rho}{3}<\rho$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\Leftrightarrow 0<\theta-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$, ou seja: $\frac{w}{3i}$ pode ser igual a z_1

8.

$3\le|z|\le 6\wedge -\pi\le\arg\left(z-(-1+i)\right)\le\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow 3\le|z|\le 6\wedge -\pi\le\arg\left(z+1-i\right)\le\frac{3\pi}{4}$

Grupo II

1.

1.1

$$z_1=(-2+i)^3=(-2)^3+3\times(-2)^2\times i+3\times(-2)\times i^2+i^3=-2+11i$$

$$z_2=\frac{1+28i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}=\frac{2-i+56i-28i^2}{4-i^2}=\frac{30+55i}{5}=6+11i$$

$$z^3+(-2+11i)=6+11i\Leftrightarrow z^3=6+11i+2-11i\Leftrightarrow z^3=8\Leftrightarrow z^3=8cis0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{8}cis\left(0+k\times\frac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow z=2cis\left(k\times\frac{2\pi}{3}\right),k\in\{0,1,2\}$$

Para $k=0,\quad z=2cis0$

Para $k=1,\quad z=2cis\frac{2\pi}{3}$

Para $k=2,\quad z=2cis\left(2\times\frac{2\pi}{3}\right)=2cis\frac{4\pi}{3}$

1.2

Sabemos que $w^n = z$ e também $\left(\frac{1}{w}\right)^n = z$.

Assim, temos que:

$$w^n=\left(\frac{1}{w}\right)^n\Leftrightarrow w^n=\frac{1}{w^n}\Leftrightarrow w^n\times w^n=1\Leftrightarrow\left(w^n\right)^2=1\Leftrightarrow w^n=\pm\sqrt{1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w^n=-1\vee w^n=1\Leftrightarrow z=-1\vee z=1$$

2.

2.1

Consideram-se os acontecimentos:

A: «O aluno escolhido é um rapaz»

B: «O aluno escolhido tem excesso de peso»

e os respetivos acontecimentos contrários.

- Considerando que $P(\bar{A}) = 55\%$ podemos organizar a informação do enunciado numa tabela:

	A	$\bar{A}$	Total
B			
$\bar{B}$			
Total	100% −55%= =45%	55%	100%

- Considerando que $P(B \mid \bar{A}) = 30\%$ podemos calcular $P(B \cap \bar{A})$ e $P(\bar{B} \cap \bar{A})$:

	A	$\bar{A}$	Total
B		$0{,}3 \times 55\%=$ $=16{,}5\%$	
$\bar{B}$		$0{,}7 \times 55\%=$ $=38{,}5\%$	
Total	$100\% - 55\%=$ $=45\%$	55%	100%

- Considerando que $P(B \mid A) = 40\%$ podemos calcular $P(B \cap A)$ e $P(\bar{B} \cap A)$:

	A	$\bar{A}$	Total
B	$0{,}6 \times 45\%=$ $=27\%$	$0{,}3 \times 55\%=$ $=16{,}5\%$	$27\% + 16{,}5\%=$ $=43{,}5\%$
$\bar{B}$	$0{,}4 \times 45\%=$ $=18\%$	$0{,}7 \times 55\%=$ $=38{,}5\%$	$18\% + 38{,}5\%=$ $=56{,}5\%$
Total	$100\% - 55\%=$ $=45\%$	55%	100%

Assim, de acordo com a informação da tabela, temos que a probabilidade de que o aluno escolhido seja rapaz, sabendo que tem excesso de peso, ou seja, $P(A \mid B)$, é dada por:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{27\%}{43{,}5\%} = \frac{18}{29}$$

2.2

Como 55 % dos alunos são raparigas e existem 200 alunos temos $200 \times 0{,}55 = 110$ raparigas e $200 - 110 = 90$ rapazes.

Assim a probabilidade de escolher duas raparigas e um rapaz, numa seleção aleatória de três alunos é dada por $\frac{{}^{110}C_2 \times {}^{90}C_1}{{}^{200}C_3} \simeq 0{,}41$

3.

Como no saco existem 5 bolas e são extraídas 4, existem apenas 5 casos possíveis.

O produto dos números extraídos é 0 (zero) sempre que a bola com o número 0 tenha sido extraída, ou seja em 4 dos 5 casos possíveis.

No restante caso, as bolas extraídas não incluem a bola com o número 0, ou seja são extraídas as bolas com os números -2,-1, 1 e 2; logo o produto dos números saídos é

$-2 \times (-1) \times 1 \times 2 = 4$.

Como as bolas são extraídas simultaneamente existem ${}^{5}C_4 = 5$ casos possíveis. Assim $P(X = 0) = \frac{4}{5}$ (pois o zero está presente em 4 das 5 extrações) e $P(X = 4) = \frac{1}{5}$ (pois o zero não está presente em apenas 1 das 5 extrações).

4.

4.1

Para determinar o zero da função f vamos resolver a equação $f(x) = 0$:

$$e^{x-2} - \frac{4e^{-x}+4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow e^2 e^{x-2} - (4e^{-x}+4) = 0 \Leftrightarrow e^x - 4e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - \frac{4}{e^x} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} \quad - 4 - 4e^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 4 = 0$$

sendo $y = e^x$vem:

$$y^2 - 4\text{y} - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-4)}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = 2 + 2\sqrt{2} \quad \vee \; y = 2 - 2\sqrt{2}$$

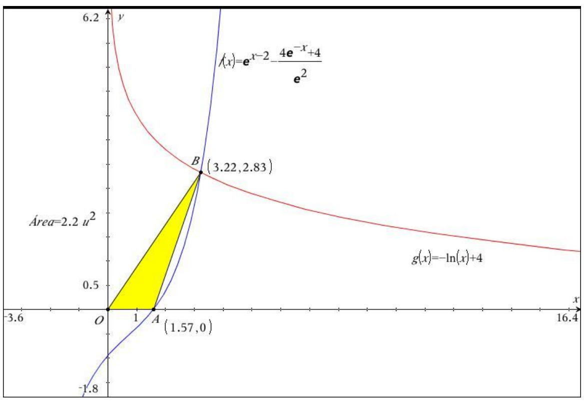
como $y = e^x$temos $e^x = 2 + 2\sqrt{2} \;\vee\; e^x = 2 - 2\sqrt{2}$

como $2 - 2\sqrt{2} < 0$, $e^x = 2 - 2\sqrt{2}$ é uma equação impossível, e portanto:

$e^x = \left(2 + 2\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(2 + 2\sqrt{2}\right)$ é a única solução da equação.

4.2

Reproduz-se a seguir o gráfico visualizado na calculadora:



Calculando o zero da função f observamos que a abcissa do ponto A é 1,57.

Calculando a interseção do gráfico das duas funções, temos que as coordenadas do ponto B são (3,22 ; 2,83).

Assim, considerando a base do triângulo o lado $[OA]$, podemos considerar para a medida da base 1,57 *u.m.* e para a medida da altura 2,83 *u.m.*, logo

$A_{[OAB]} = \frac{1{,}57 \times 2{,}83}{2} = 2{,}22$; ou seja a área do triângulo $[AOB]$ é de 2,2 *u.a.* aproximadamente.

5.

5.1

Se existirem assíntotas não verticais o respetivo declive é dado por

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Calculando $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ temos:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}=e^{1+\infty}=e^{+\infty}=+\infty$$

pelo que não existem assíntotas quando $x\to-\infty$.

Calculando $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(x+1)-x\ln(x)+3x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)-\ln(x)+3\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)+3=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)+3=\ln(1)+3=3$$

pelo que, a existir uma assíntota quando $x\to+\infty$, o respetivo declive será 3.

A ordenada na origem é dada por: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)$.

Calculando:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln(x+1)-x\ln(x)+3x-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln(x+1)-x\ln(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x}\right)$$

considerando $y=\frac{1}{x}$, se $x\to+\infty$ então $y\to0^+$, e

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{y\to0^+}\left(\frac{1}{y}\ln\frac{\frac{1}{y}+1}{\frac{1}{y}}\right)=\lim_{y\to0^+}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$$

Pelo que a reta de equação $y=3x+1$ é a única assíntota do gráfico de f.

5.2

Seja $y=mx+b$ a equação da reta tangente, começamos por determinar o declive (m), ou seja $f'(-1)$. Assim determina-se a derivada da função f para valores inferiores a 0.

$f'(x)=(x)'e^{1-x}+x(e^{1-x})'=e^{1-x}+x(-1\times e^{1-x})=e^{1-x}-xe^{1-x}$

Então, o declive da reta é $m=f'(-1)=e^{1-(-1)}-(-1)e^{1-(-1)}=e^2+e^2=2e^2$

Calculando $f(-1) = (-1)e^{1-(-1)} = -e^2$ temos que o ponto de tangência tem de coordenadas $(-1, -e^2)$ e é um ponto que pertence à reta.

Assim, substituindo as coordenadas na equação da reta $y = 2e^2x + b$ temos:

$-e^2 = 2e^2(-1) + b \Leftrightarrow -e^2 - 2e^2(-1) = b \Leftrightarrow -e^2 + 2e^2 = b \Leftrightarrow e^2 = b$

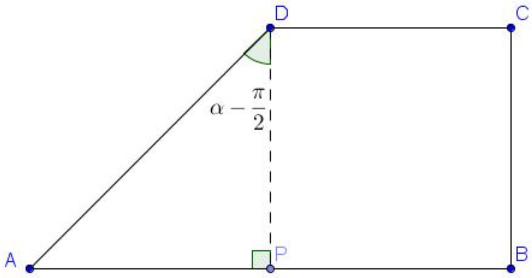
Ou seja a equação da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa -1 é

$$y = 2e^2x + e^2$$

6.

6.1

Considerando um ponto P sobre o lado [AB], tal que [DP] é perpendicular ao lado [AB], temos que:



- $\overline{DP} = 1$ e $\overline{PB} = 1$
- $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{DP}}{\overline{DA}} \Leftrightarrow \overline{DA} = \frac{1}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$
- $tg\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = tg\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

Como $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = sen\alpha$ e $tg\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{tg\alpha}$ vem que:

$\overline{DA} = \frac{1}{sen\alpha}$ e $\overline{AP} = -\frac{1}{tg\alpha}$

Assim, o perímetro do trapézio é dado por:

$P_{[ABCD]} = \overline{AP} + \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = -\frac{1}{tg\alpha} + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{sen\alpha} = 3 - \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} + \frac{1}{sen\alpha} =$

$= 3 + \frac{-\cos\alpha + 1}{sen\alpha} = 3 + \frac{1 - \cos\alpha}{sen\alpha}$

Ou seja, pela função $P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \cos\alpha}{sen\alpha}$ para $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

6.2

Começamos por determinar a derivada da função *P*:

$$P'(\alpha) = (3)' + \frac{(1 - \cos\alpha)' sen\alpha - (1 - \cos\alpha)(sen\alpha)'}{sen^2\alpha} = \frac{sen\alpha sen\alpha - (1 - \cos\alpha)(\cos\alpha)}{sen^2\alpha} =$$

$$= \frac{sen^2\alpha - (\cos\alpha - \cos^2\alpha)}{sen^2\alpha} = \frac{sen^2\alpha - \cos\alpha + \cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos\alpha}{sen^2\alpha} =$$

$= \dfrac{1 - \cos\alpha}{sen^2\alpha}$

Como $tg^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

temos $\left(-\sqrt{8}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 8 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{3}$

Como $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\cos\theta = -\frac{1}{3}$

Também sabemos que $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$

logo $sen^2\theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow sen^2\theta = \frac{8}{9}$

Assim temos que $P'(\theta) = \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{8}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{2}$