GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 8 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2012

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova (Versão 1 ou Versão 2). A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 2, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. O código de acesso a uma conta de *e-mail* é constituído por quatro letras e três algarismos. Sabe-se que um código tem quatro «a», dois «5» e um «2», como, por exemplo, o código 2aa5a5a

   Quantos códigos diferentes existem nestas condições?

   (A) 105 **(B)** 210 **(C)** 5040 **(D)** 39

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	b^3	a	$2a$

   Sabe-se que:

   - a e b são números reais;
   - o valor médio da variável aleatória X é $\frac{35}{24}$

   Qual é o valor de b?

   (A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

3. Numa certa linha do triângulo de Pascal, o penúltimo elemento é 111

   Escolhe-se, ao acaso, um elemento dessa linha.

   Qual é a probabilidade de esse elemento ser maior do que 10^5?

   (A) $\frac{3}{56}$ **(B)** $\frac{53}{56}$ **(C)** $\frac{2}{37}$ **(D)** $\frac{35}{37}$

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $]-1, 3[$

Sabe-se que:

- $f(1) = -4$
- a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de f
- (x_n) é uma sucessão com termos em $]-1, 1[$
- $\lim(x_n) = 1$

Qual é o valor de $\lim\left(f(x_n)\right)$?

(A) $+\infty$

(B) -4

(C) -5

(D) -6

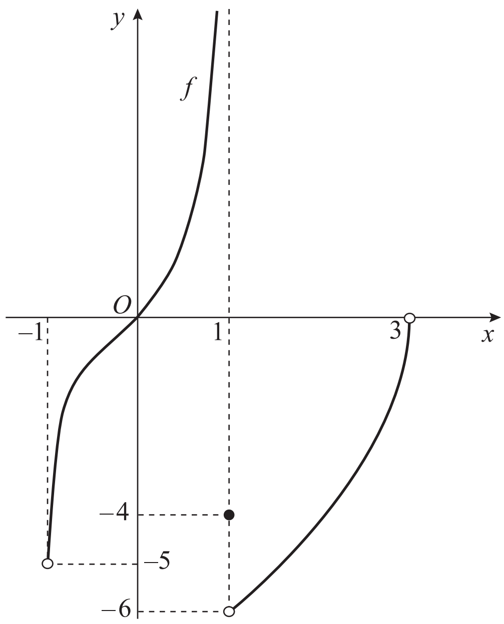

Figura 1

5. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $]-6, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x}{3} + 2\right)$

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a
- a inclinação da reta r é, em radianos, $\frac{\pi}{4}$

Qual é o valor de a?

(A) -4

(B) $-\frac{9}{2}$

(C) $-\frac{11}{2}$

(D) -5

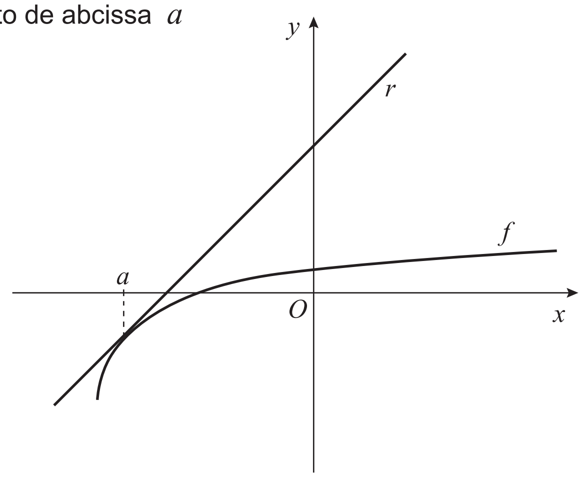

Figura 2

6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x \right) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

Em qual das opções seguintes as duas equações definem assíntotas do gráfico da função f ?

(A) $x = 1$ e $y = -2x + 1$

(B) $x = 1$ e $y = 2x + 1$

(C) $y = 3$ e $y = -2x + 1$

(D) $y = 2$ e $y = 2x + 1$

7. Seja k um número real, e sejam $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 3 - ki$ dois números complexos.

Qual é o valor de k para o qual $z_1 \times \overline{z_2}$ é um imaginário puro?

(A) $\frac{3}{2}$ **(B)** $-\frac{3}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 6

8. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEFGHI]$

Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo z

O vértice A tem coordenadas $(0, -3)$

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice F ?

(A) $3 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{18}$

(B) $3 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{18}$

(C) $3 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

(D) $3 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{9}$

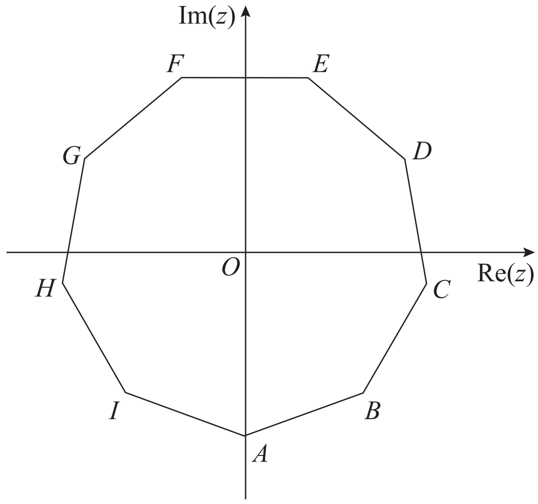

Figura 3

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

1.1. Seja n um número natural.

Determine $\dfrac{\sqrt{3} \times i^{4n-6} + 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)}$, sem recorrer à calculadora.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

1.2. Seja $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que $z_1 = \operatorname{cis}\alpha$ e $z_2 = \operatorname{cis}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

Mostre, analiticamente, que a imagem geométrica de $z_1 + z_2$, no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

2. A empresa AP comercializa pacotes de açúcar.

2.1. Seja Y a variável aleatória «massa, em gramas, de um pacote de açúcar comercializado pela empresa AP».

A variável aleatória Y segue uma distribuição normal de valor médio $6{,}5$ gramas e desvio padrão $0{,}4$ gramas.

Um pacote de açúcar encontra-se em condições de ser comercializado se a sua massa estiver compreendida entre $5{,}7$ gramas e $7{,}3$ gramas.

Determine o valor aproximado da probabilidade de, em 10 desses pacotes de açúcar, exatamente oito estarem em condições de serem comercializados.

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

2.2. Considere o problema seguinte.

«A empresa AP pretende aplicar, junto dos seus funcionários, um programa de reeducação alimentar. De entre os 500 funcionários da empresa AP vão ser selecionados 30 para formarem um grupo para frequentar esse programa. A Joana e a Margarida são irmãs e são funcionárias da empresa AP. Quantos grupos diferentes podem ser formados de modo que, pelo menos, uma das duas irmãs, a Joana ou a Margarida, não seja escolhida para esse grupo?»

Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.

I) ${}^{500}C_{30} - {}^{498}C_{28}$ II) $2 \times {}^{498}C_{29} + {}^{498}C_{30}$

Numa composição, apresente o raciocínio que conduz a cada uma dessas respostas.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$, com $P(B) \neq 0$

Mostre que $P(\overline{A \cap B} \mid B) + P(A \mid B) = 1$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \sqrt{1 - x^3}} & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{k+1} & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1 - e^{4x}}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Determine k, de modo que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

4.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

4.3. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g', de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por $g'(x) = f(x) - \dfrac{1}{x}$

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

5. Considere a função f, de domínio $[-7, 0[$, definida por

$$f(x) = e^x + \ln(x^2) + 3$$

Sejam A e B os pontos de intersecção do gráfico de f com a bissetriz dos quadrantes pares, e seja d a distância entre os pontos A e B

Determine d, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B
- indicar as coordenadas dos pontos A e B com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor de d com arredondamento às centésimas.

6. Na Figura 4, está representado o quadrado $[ABCD]$

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

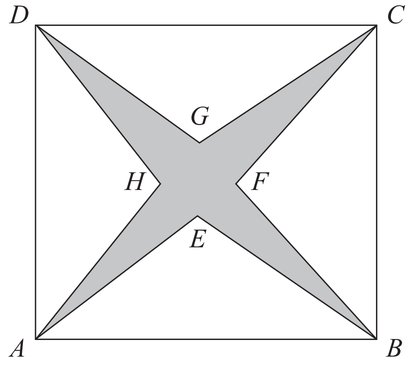

Figura 4

6.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x, por $a(x) = 16(1 - \operatorname{tg} x)$

6.2. Mostre que existe um valor de x compreendido entre $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{5}$ para o qual a área da região sombreada é 5

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.**	....(8 × 5 pontos)......................	40 pontos
		40 pontos

GRUPO II

1.		
	1.1.	15 pontos
	1.2.	15 pontos
2.		
	2.1.	15 pontos
	2.2.	15 pontos
3.	....	15 pontos
4.		
	4.1.	10 pontos
	4.2.	15 pontos
	4.3.	20 pontos
5.	....	15 pontos
6.		
	6.1.	10 pontos
	6.2.	15 pontos
		160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**