mathniversity®
promovemos o teu sucesso na matemática

Proposta de Resolução do Exame Nacional de Matemática A

Cód 635 - 2ªFase, 16 de Julho 2012

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	A	C	B	A	D	B	D	B
Versão 2	C	A	D	D	A	C	B	D

1. Selecionado 4 das 7 posições para a posição das letras «a» e depois 1 das restantes 3 posições para a posição do número «2», as restantes 2 posições serão preenchidas com números «5».

   Assim ${}^{7}C_3 \times 3 = 105$ é um cálculo possível.

   Existem 105 códigos diferentes nas condições do enunciado.

2. De acordo com a informação do enunciado relativa ao valor médio, sabemos que:

   $$0 \times b^3 + 1 \times a + 2 \times 2a = \frac{35}{24} \Leftrightarrow a + 4a = \frac{35}{24} \Leftrightarrow 5a = \frac{35}{24} \Leftrightarrow a = \frac{7}{24}$$

   Como a soma das probabilidades tem que ser 1, temos que:

   $$b^3 + a + 2a = 1 \Leftrightarrow b^3 + 3a = 1 \Leftrightarrow b^3 + 3\left(\frac{7}{24}\right) = 1 \Leftrightarrow b^3 = 1 - \frac{21}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{3}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

3. A linha do Triângulo de Pascal em causa é composta pelos elementos do tipo ${}^{111}C_k$ e sabemos que a linha tem 112 elementos.

   Os primeiros elementos da linha são ${}^{111}C_0 = 1$, ${}^{111}C_1 = 111$, ${}^{111}C_2 = 6105$ e ${}^{111}C_3 = 221815$. É possível concluir que apenas os três primeiros são inferiores a 10^5. Atendendo às propriedades do triângulo de Pascal também os três últimos são inferiores a 10^5.

   Assim, existem 6 números inferiores a 10^5 num total de 112 da linha em causa, logo $112 - 6 = 106$ são maiores do que 10^5.

   Logo a probabilidade pedida é $\frac{106}{112} = \frac{53}{56}$.

4. Como (x_n) é uma sucessão de termos em $]-1, 1[$ e $\lim(x_n) = 1$. Sabemos que os termos da sucessão são inferiores a 1, pelo que $\lim\left(f(x_n)\right) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

   Logo, por observação do gráfico é possível afirmar que $\lim\left(f(x_n)\right) = +\infty$.

5. Sabemos que o declive *m* da reta tangente ao gráfico de uma função é dado pela valor da sua derivada no ponto de tangência

Como $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{x+6}{3}}=\dfrac{1}{x+6}$.

Temos que $m=f'(a)=\dfrac{1}{a+6}$.

Também sabemos que o declive de uma reta é dado pela tangente da sua inclinação α , pelo que $m=\tan\alpha=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$.

Logo $m=f'(a)\Leftrightarrow\dfrac{1}{a+6}=1\Leftrightarrow 1=a+6\wedge a\neq -6\Leftrightarrow a=-5$.

6. Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ a reta de equação $x=1$ é assíntota do gráfico de *f*.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)=0$ então a reta de equação $y=2x+1$ é, também, assíntota do gráfico de *f*.

7.

$$z_1\times\overline{z_2}=(2+i)\left(\overline{3-ki}\right)=(2+i)(3+ki)=6+2ki+3i+ki^2=(6-k)+i(2k+3)$$

Para que $z_1\times\overline{z_2}$ seja um imaginário puro, $6-k=0$.

Ou seja $k=6$.

8. Seja *z* o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto A e *w* o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto F.

Assim, $z=3\operatorname{cis}\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$.

Como o polígono tem nove lados, $\arg(w)=\arg(z)+2\pi\times\dfrac{5}{9}$

Logo, $\arg(w)=\arg(z)+\dfrac{10\pi}{9}=-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{10\pi}{9}=\dfrac{11}{18}\pi$.

Como $|w|=|z|=3$, temos que $w=3\operatorname{cis}\left(\dfrac{11\pi}{18}\right)$.

Grupo II

1.

1.1.

$$\frac{\sqrt{3}\times i^{4n-6}+2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{\sqrt{3}\times i^{-6}+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{i^2}+\sqrt{3}-i}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}-i}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)}=$$

$$=\frac{-i}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{7\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{10}\right)$$

1.2.

$$z_1=\operatorname{cis}\alpha=\cos\alpha+i\ \sin\alpha$$

$$z_2=\operatorname{cis}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+i\ \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha+i\cos\alpha$$

$$z_1+z_2=\cos\alpha+i\sin\alpha+\left(-\sin\alpha+i\cos\alpha\right)=\left(\cos\alpha-\sin\alpha\right)+i\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)$$

Como $\alpha\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$:

$\sin\alpha>\cos\alpha$, logo $\cos\alpha-\sin\alpha<0$

$\cos\alpha>0,\ \sin\alpha>0,$ pelo que: $\cos\alpha+\sin\alpha>0$

Como $\operatorname{Re}\left(z_1+z_2\right)<0$ e $\operatorname{Im}\left(z_1+z_2\right)>0$, então $z_1+z_2\in 2^{\text{o}}Q$

2.

2.1.

Seja A: a massa, em gramas, de um pacote de açúcar está compreendida entre 5,7 e 7,3

$$P\left(A\right)=P(5,7<Y<7,3)=0,9545$$

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-0,9545=0,0455$$

Seja X o número de pacotes com massa, em gramas, compreendida entre 5,7 e 7,3 em 10 pacotes.

$$P\left(X=8\right)={}^{10}C_8\times\left(0,9545\right)^8\times\left(0,0455\right)^2\approx 0,064$$

2.2.

Como o número de grupos diferentes, formados de modo a que pelo menos uma das duas irmãs não faça parte, corresponde ao número total de grupos que se podem formar com excepção daqueles em que as duas irmãs estão presentes, a resposta I representa precisamente essa diferença entre a totalidade de grupos diferentes de 30 funcionários que se podem formar de entre os 500 existentes, e o número de grupos diferentes que se podem formar, nos quais as duas irmãs estão incluídas.

Na resposta II, $2\times {}^{498}C_{29}$ representa o número de grupos diferentes que se podem formar nos quais uma das irmãs está presente. ${}^{498}C_{30}$ representa o número de grupos diferentes formados por funcionários, excluindo qualquer uma das duas irmãs. Assim, $2\times {}^{498}C_{29}\times {}^{498}C_{30}$ representa, igualmente, o número de grupos diferentes, nos quais pelo menos uma das duas irmãs não pertence ao grupo.

3.

$$P\left(\overline{A\cap B}\,|\,B\right)+P\left(A\,|\,B\right)=\frac{P\left(\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap B\right)}{P\left(B\right)}+\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=$$

$$=\frac{P\left(\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\overbrace{\left(\overline{B}\cap B\right)}^{\varnothing}\right)}{P\left(B\right)}+\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=$$

$$=\frac{\left(P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\right)+P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=$$

$$=\frac{P\left(B\right)}{P\left(B\right)}=1$$

4.

4.1.

$f\left(0\right)=1-e^{k+1}$

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{4x}}{x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{4x}-1}{x}=-4\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{4x}-1}{4x}$$

Seja $4x=y$. Quando $x\to 0$, $y\to 0$, pelo que: $-4\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{y}-1}{y}=-4\times 1=-4$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=f\left(0\right)$, então: $-4=1-e^{k+1}\Leftrightarrow e^{k+1}=5\Leftrightarrow k+1=\ln 5\Leftrightarrow k=-1+\ln 5$

4.2.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -4$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{1-\sqrt{1-x^3}} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{1-\sqrt{1-x^3}} \times \frac{1+\sqrt{1-x^3}}{1+\sqrt{1-x^3}}\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x \times \left(1+\sqrt{1-x^3}\right)}{1-\left(\sqrt{1-x^3}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x \times \left(1+\sqrt{1-x^3}\right)}{1-1+x^3} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{\left(1+\sqrt{1-x^3}\right)}{x^2} = 1 \times \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Assim sendo, $x=0$ é a única assíntota vertical do gráfico da função f dado esta ser continua em $IR\setminus\{0\}$.

4.3.

$$g'(x) = f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1-e^{4x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1-e^{4x}-1}{x} = -\frac{e^{4x}}{x}$$

$$g''(x) = \frac{-4e^{4x} \times x + e^{4x}}{x^2} = \frac{e^{4x}(-4x+1)}{x^2}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{4x}(-4x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{4x}(-4x+1) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{4x} = 0 \vee -4x+1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

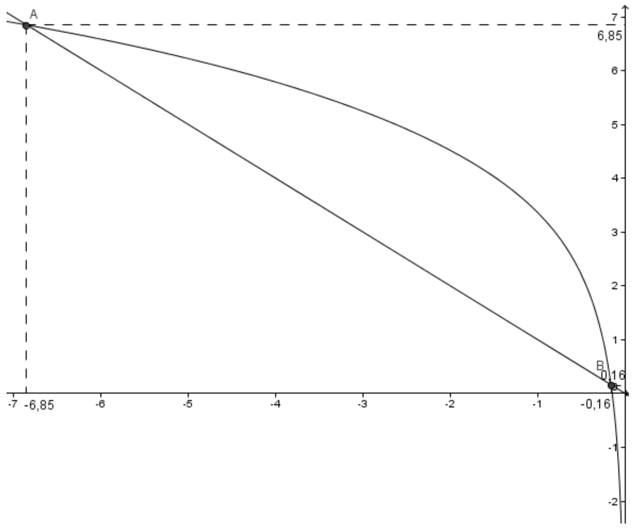
x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\cup$	P.I	$\cap$

Ponto de inflexão para $x = \frac{1}{4}$

Concavidade voltada para cima em $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$

Concavidade voltada para baixo em $x \in \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$

5.



$$d=\sqrt{\left(-0{,}16-\left(-6{,}85\right)\right)^2+\left(0{,}16-6{,}85\right)^2}\approx 9{,}46u.c.$$

6.

6.1.

Os triângulos $[ABE]$, $[BCF]$, $[CDG]$ e $[DAH]$ são geometricamente iguais ou congruentes.

Seja M o ponto médio de $[AB]$.

$$\tan x=\frac{\overline{ME}}{\overline{AM}}\Leftrightarrow \tan x=\frac{\overline{ME}}{2}\Leftrightarrow \overline{ME}=2\tan x$$

$$A_{\Delta[ABE]}=\frac{4\times 2\tan x}{2}=4\tan x$$

$$a(x)=16-4\times 4\tan x\Leftrightarrow a(x)=16-16\tan x\Leftrightarrow a(x)=16(1-\tan x)$$ c.q.d.

6.2.

A função a é contínua em $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$, pelo que também o será em $\left]\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{5}\right[$.

Como $a\left(\frac{\pi}{12}\right)\approx 11{,}71$ e $a\left(\frac{\pi}{5}\right)\approx 4{,}38$, então, pelo Teorema de Bolzano, existe pelo menos um $x\in\left]\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{5}\right[$, tal que $a(x)=5$.