Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 10.12.2008

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste. A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\, maior \times Diagonal\, menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\, maior + Base\, menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\;,\; k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1\, p_1 + ... + x_n\, p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1-\mu)^2\, p_1 + ... + (x_n-\mu)^2\, p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

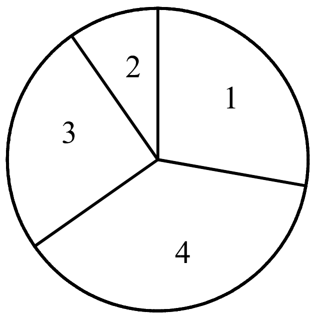
- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. A soma dos dois primeiros elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 13.

Quantos elementos dessa linha são menores do que 70?

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8

2. Na figura está representado um círculo dividido em quatro sectores circulares diferentes, numerados de 1 a 4.



Estão disponíveis **cinco** cores para pintar este círculo.

Pretende-se que sejam respeitadas as seguintes condições:

- todos os sectores devem ser pintados;
- cada sector é pintado com uma única cor;
- sectores com um raio em comum não podem ficar pintados com a mesma cor;
- o círculo deve ficar pintado com **duas** ou com **quatro** cores.

De quantas maneiras diferentes pode o círculo ficar pintado?

(A) 140 **(B)** 230 **(C)** 310 **(D)** 390

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$

Sabe-se que $P(A) = 0{,}5$ e que $P(B) = 0{,}7$

Podemos então garantir que ...

(A) A e B são acontecimentos contrários

(B) A e B são acontecimentos compatíveis

(C) A está contido em B

(D) o acontecimento $A \cup B$ é certo

4. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	a	b	$0{,}5$

$($$a$ e b designam números reais$)$

O valor médio desta variável aleatória é $1{,}4$

Qual é o valor de a ?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}5$

5. O diâmetro, em milímetros, dos parafusos produzidos por uma certa máquina é uma variável aleatória X com distribuição normal, de valor médio 9.

Qualquer parafuso produzido por essa máquina passa por um controle de qualidade. Ao passar por esse controle, o parafuso é aprovado se o seu diâmetro estiver compreendido entre 8,7 e 9,3 milímetros. Caso contrário, é rejeitado.

Sabe-se que 99,73% dos parafusos são aprovados.

Qual é o desvio padrão da variável aleatória X ?

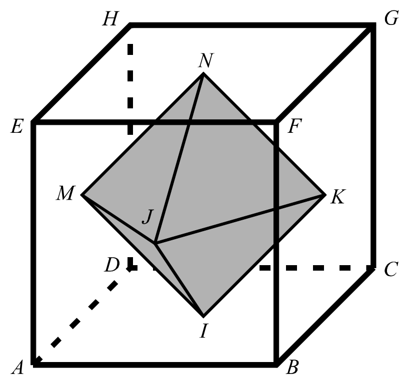
(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}3$ **(C)** $0{,}6$ **(D)** $0{,}9$

Grupo II

Nas respostas a itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Na figura estão representados dois poliedros, o cubo $[ABCDEFGH]$ e o octaedro $[IJKLMN]$ (o vértice L do octaedro não está visível).



Cada vértice do octaedro pertence a uma face do cubo.

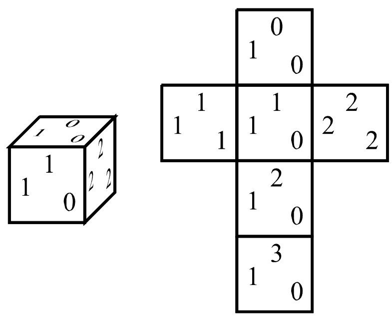
1.1. Considere todos os conjuntos que são constituídos por cinco dos catorze vértices dos dois poliedros (como, por exemplo, $\{A, B, C, K, L\}$).

1.1.1. Quantos desses conjuntos são constituídos por três vértices do cubo e dois vértices do octaedro?

1.1.2. Quantos desses conjuntos são constituídos por cinco vértices do mesmo poliedro?

1.2. Escolhem-se ao acaso cinco dos catorze vértices dos dois poliedros.
Qual é a probabilidade de os cinco vértices escolhidos pertencerem todos à mesma face do cubo? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2. Na figura está representado um dado equilibrado, bem como a respectiva planificação.



Conforme se pode observar na figura, existem três números em cada face.

Lança-se este dado **uma só vez** e observam-se os números da face que fica voltada para cima. Diz-se então que saíram esses três números.

2.1. Seja X a variável aleatória «***produto** dos três números saídos*».
Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X.
Apresente as probabilidades na forma de fracção.

2.2. Seja R o acontecimento «*os números saídos são todos iguais*».
Seja S o acontecimento «*a **soma** dos números saídos é igual a 3*».
Os acontecimentos R e S são independentes? Justifique.

3.

3.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$ de probabilidade não nula.

Considere que $\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B e que $P(A|B)$ e $P(B|A)$ designam probabilidades condicionadas.

Mostre que $P(A|B) - P(\overline{B}) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$

3.2. Relativamente a uma turma do 12º ano, sabe-se que:

- 60% dos alunos da turma praticam desporto;
- 40% dos alunos da turma são raparigas;
- metade dos praticantes de desporto são raparigas.

Escolhendo ao acaso um aluno da turma, qual é a probabilidade de ser praticante de desporto, sabendo que é uma rapariga?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

Nota:

Se desejar, pode utilizar a fórmula da alínea anterior na resolução deste problema. Nesse caso, comece por explicitar o significado dos acontecimentos A e B, no contexto do problema.

Também pode resolver o problema através de um diagrama, de uma tabela, ou utilizando qualquer outro processo.

4. Um saco contém bolas brancas e bolas pretas, pelo menos uma de cada cor, num total de cinco.

Tiram-se, simultaneamente e ao acaso, três bolas do saco.

Seja X a variável aleatória «*número de bolas brancas retiradas*».

Sabendo que a variável X toma exclusivamente os valores 2 e 3, indique o número de bolas brancas e o número de bolas pretas que estão inicialmente no saco.

Numa pequena composição, explique o seu raciocínio.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I ....(5 × 10 pontos) ....50 pontos

Grupo II ....150 pontos

1. .... 50 **pontos**

1.1. ....30 pontos

1.1.1. ....15 pontos

1.1.2. ....15 pontos

1.2. ....20 pontos

2. .... 40 **pontos**

2.1. ....20 pontos

2.2. ....20 pontos

3. .... 40 **pontos**

3.1. ....20 pontos

3.2. ....20 pontos

4. .... 20 **pontos**

TOTAL .... 200 pontos