Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 27.05.2009

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na folha de respostas, indique claramente a versão do teste.
A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r *– raio da base*; g *– geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r *– raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\qquad$ (r *– raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\;,\; k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1\, p_1 + ... + x_n\, p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2\, p_1 + ... + (x_n - \mu)^2\, p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Sejam $a,\ x$ e y três números reais tais que $\log_a x = 1 + 5\log_a y$

Qual das igualdades seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $x = a\,y^5$

(B) $x = 5\,a\,y$

(C) $x = 5\,y$

(D) $x = y^5$

2. Sejam $a,\ b,\ c,$ e d as funções reais de variável real definidas por:

$a(x) = 3 + \ln x$

$b(x) = e^x$

$c(x) = 10 \operatorname{sen} x$

$d(x) = 2 + \operatorname{tg} x$

Considere que o domínio de cada uma das quatro funções é o conjunto dos números reais para os quais tem significado a expressão que a define.

Qual é a função cujo gráfico tem mais do que uma assimptota?

(A) A função a

(B) A função b

(C) A função c

(D) A função d

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 1$

Seja g a função cujo gráfico é a recta representada na figura 1.

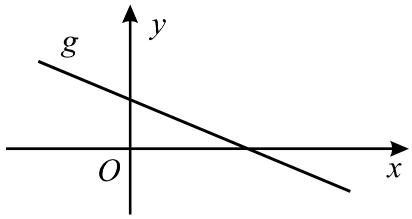

Figura 1

Seja $h = f + g$.

Seja h' a função derivada da função h .

O gráfico da função h' é uma recta. Sejam m e b, respectivamente, o declive e a ordenada na origem desta recta.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $m > 0$ e $b > 0$

(B) $m > 0$ e $b < 0$

(C) $m < 0$ e $b > 0$

(D) $m < 0$ e $b < 0$

4. Uma certa linha do Triângulo de Pascal tem exactamente nove elementos. Escolhem-se ao acaso dois desses nove elementos.

Qual é a probabilidade de escolher dois números cujo produto seja igual a 8?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{9}$ **(C)** $\frac{2}{9}$ **(D)** $\frac{4}{9}$

5. Para um certo número real positivo ρ e para um certo número real α compreendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, o número complexo $\rho\, cis\, \alpha$ tem por imagem geométrica o ponto P, representado na figura 2.

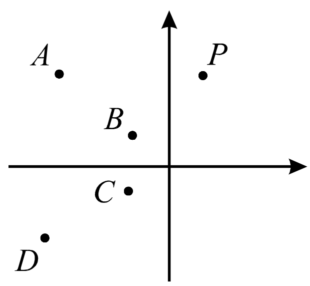

Figura 2

Qual é a imagem geométrica do número complexo $\frac{\rho}{2}\, cis\, (2\,\alpha)$?

(A) O ponto A **(B)** O ponto B **(C)** O ponto C **(D)** O ponto D

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Determine $\dfrac{(2+i)^2+1+6i^{35}}{1+2i}$ **sem recorrer à calculadora**.

Apresente o resultado na forma algébrica.

2. Efectua-se um único lançamento de um dado **tetraédrico**, com as faces **numeradas de 1 a 4**. Considere que o «*número que sai*» é o número que está na face que fica voltada para baixo.

O dado **não** é equilibrado, pelo que os quatro números **não** têm a mesma probabilidade de sair.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes:

A : «*sair número ímpar*»;

B : «*sair número maior do que 2*».

Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = 0{,}4$
- $P(A) = P(\overline{A})$
- $P(A \cup B) = 0{,}8$

Seja X a variável aleatória «*número saído no lançamento efectuado*».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

Nota: apresente todas as justificações e todos os cálculos que efectuar na determinação dos valores das probabilidades.

3. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua **derivada**, $f\,'$, é definida por

$$f\,'(x) = (2x + 4)\,e^x$$

Resolva os dois itens seguintes, **sem recorrer à calculadora**.

3.1. Seja A o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas. Sabe-se que a ordenada deste ponto é igual a 1.

Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto A.

3.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

4. Considere a função g, de domínio $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x + \ln(1 + x - x^2) & se \quad -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2 & se \quad x = 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x} - 1} & se \quad x > 1 \end{cases}$$

4.1. Verifique se a função g é contínua em $x = 1$, **sem recorrer à calculadora**.

4.2. **Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, determine o valor de x pertencente ao intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 1\right[$ tal que $g(x) = -2 + g(4)$.

Indique o valor pedido arredondado às décimas e apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora.

5. Na figura 3 estão representados:

- uma circunferência de centro O e raio 1
- dois pontos, A e B, sobre a circunferência, tais que $[AB]$ é um diâmetro
- uma semi-recta $\dot{O}A$
- um segmento de recta $[PQ]$

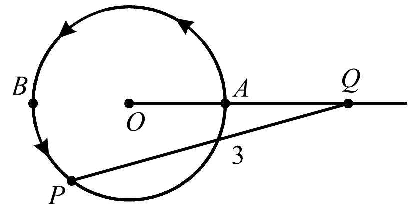

Figura 3

Considere que:

- o ponto P, partindo de A, se desloca sobre a circunferência, dando uma volta completa, no sentido indicado pelas setas da figura 3
- o ponto Q se desloca sobre a semi-recta $\dot{O}A$, acompanhando o movimento do ponto P, de tal forma que se tem sempre $\overline{PQ} = 3$

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem a semi-recta $\dot{O}A$ e por lado extremidade a semi-recta $\dot{O}P$ (ver figura 4).

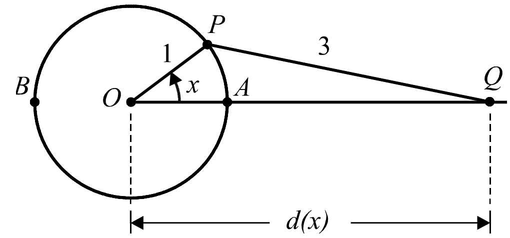

Figura 4

Seja d a função que, a cada valor de x pertencente a $[0, 2\pi]$, associa a distância, $d(x)$, do ponto Q ao ponto O.

5.1. Considere as seguintes afirmações sobre a função d e sobre a sua derivada, d' (a função d tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio).

I. $d(0) = 2\,d(\pi)$

II. $\forall\, x \in [0, 2\pi]\,,\ d'(x) < 0$

Elabore uma pequena **composição** na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira, ou falsa.

Nota: neste item, não defina analiticamente a função d; a sua composição deve apoiar-se na forma como esta função foi apresentada (para cada valor de x, tem-se que $d(x)$ é a distância do ponto Q ao ponto O).

5.2. Defina analiticamente a função d no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (isto é, determine uma expressão que dê o valor de $d(x)$, para cada x pertencente a este intervalo).

Sugestão: trace a altura do triângulo $[OPQ]$ relativa ao vértice P, designe por R o ponto de intersecção desta altura com a semi-recta $\dot{O}A$, e tenha em conta que $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ}$.

COTAÇÕES

Grupo I .... **(5 $\times$ 10 pontos)** ....**50 pontos**

Grupo II ....**150 pontos**

1. .... **20 pontos**

2. .... **20 pontos**

3. .... **35 pontos**
- **3.1.** ....15 pontos
- **3.2.** ....20 pontos

4. .... **35 pontos**
- **4.1.** ....20 pontos
- **4.2.** ....15 pontos

5. .... **40 pontos**
- **5.1.** ....20 pontos
- **5.2.** ....20 pontos