

# EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)  
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos  
2000

1.ª FASE  
1.ª CHAMADA  
VERSÃO 1

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

### VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

V.S.F.F.

135.V1/1

---

## Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

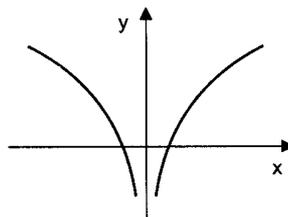
(A)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 0$

(B)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = +\infty$

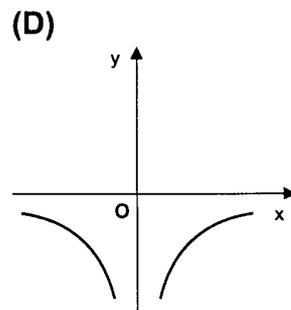
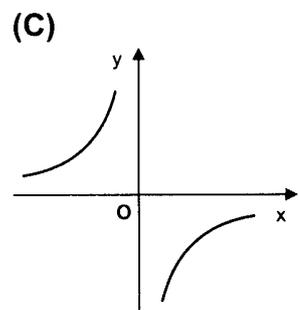
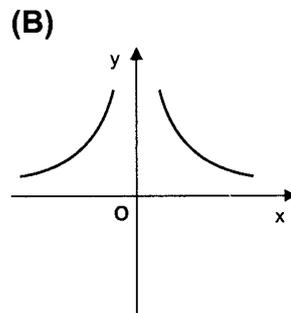
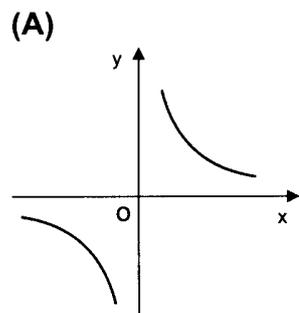
(C)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 1$

(D) Não existe  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

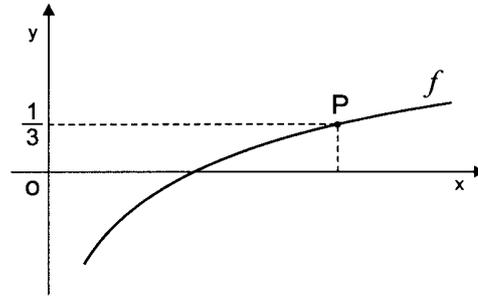
2. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .



Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função  $g'$ , derivada de  $g$ ?



3. Na figura está parte da representação gráfica da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \log_8 x$



$P$  é um ponto do gráfico de  $f$ , que tem ordenada  $\frac{1}{3}$

Qual é a abcissa do ponto  $P$ ?

- (A)  $\frac{8}{3}$                       (B) 1                      (C)  $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$                       (D) 2

4. Um tanque tem a forma de um paralelepípedo rectângulo, com  $7\text{ m}$  de comprimento,  $5\text{ m}$  de largura e  $4\text{ m}$  de altura.

Admita que o tanque está vazio. Num certo instante, é aberta uma torneira que verte água para o tanque, à taxa de  $2\text{ m}^3$  por hora, até este ficar cheio.

Qual é a função que dá a **altura**, em metros, da água no tanque,  $t$  horas após a abertura da torneira?

- (A)  $h(t) = 4 - 2t$ ,  $t \in [0, 70]$                       (B)  $h(t) = \frac{2t}{35}$ ,  $t \in [0, 70]$   
 (C)  $h(t) = 4 - 2t$ ,  $t \in [0, 140]$                       (D)  $h(t) = \frac{2t}{35}$ ,  $t \in [0, 140]$

5. Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , uma elipse de eixo maior paralelo ao eixo  $Oy$  e cujo centro é o ponto de intersecção das rectas  $x = -1$  e  $y = 2$ .

Qual das seguintes equações pode definir esta elipse?

- (A)  $(x - 1)^2 + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$                       (B)  $\frac{(x + 1)^2}{9} + (y - 2)^2 = 1$   
 (C)  $(x + 1)^2 + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$                       (D)  $(x + 1)^2 - \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$

6. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , considere os pontos  $P(0, 0, 4)$  e  $Q(0, 4, 0)$ . Qual dos seguintes pontos pertence ao plano mediador do segmento de recta  $[PQ]$ ?

- (A)  $A(1, 0, 0)$                       (B)  $B(1, 2, 0)$                       (C)  $C(2, 1, 0)$                       (D)  $D(1, 0, 2)$

V.S.F.F.

135.V1/3

7. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , qual das seguintes rectas intersecta os três planos coordenados ( $xOy$ ,  $xOz$  e  $yOz$ )?
- (A)  $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(1, 0, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$   
(B)  $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(0, 2, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$   
(C)  $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(1, 2, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$   
(D)  $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(1, 2, 3)$ ,  $k \in \mathbb{R}$
8. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado três vezes. Qual é a probabilidade de saírem três números ímpares?
- (A)  $\frac{1}{27}$                       (B)  $\frac{1}{8}$                       (C)  $\frac{1}{3}$                       (D)  $\frac{1}{2}$
9. Uma turma de uma escola secundária tem nove rapazes e algumas raparigas. Escolhendo ao acaso um aluno da turma, a probabilidade de ele ser um rapaz é  $\frac{1}{3}$ . Quantas raparigas tem a turma?
- (A) 27                      (B) 18                      (C) 15                      (D) 12

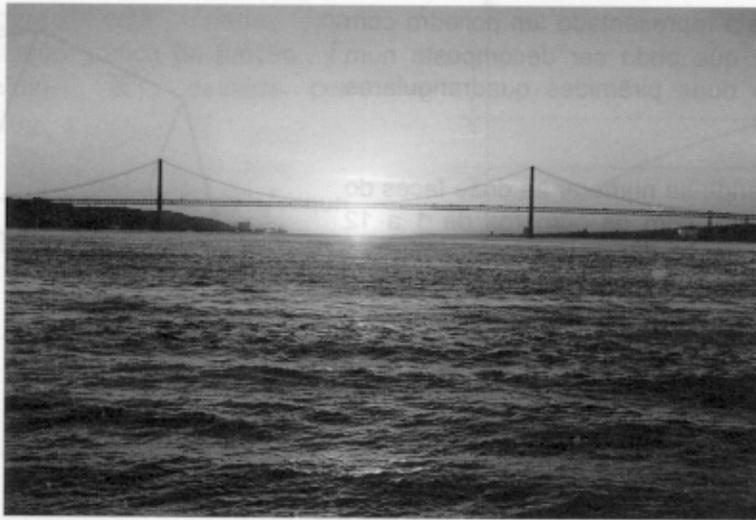
---

## Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção:** quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^x(x^2 + x)$ . Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:
- 1.1. Verifique que  $f'(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$  e determine uma equação da recta tangente ao gráfico de  $f$ , no ponto de abcissa 0.
- 1.2. Estude  $f$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
- 1.3. Estude a função  $f$  quanto à existência de assíptotas verticais e horizontais do seu gráfico.



2. No presente ano civil, em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem  $n$  do ano, é dado em horas, aproximadamente, por

$$f(n) = 12,2 + 2,64 \operatorname{sen} \frac{\pi(n-81)}{183} \quad n \in \{1, 2, 3, \dots, 366\}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

**Por exemplo:** no dia 3 de Fevereiro, trigésimo quarto dia do ano, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do Sol foi de  $f(34) \approx 10,3$  horas.

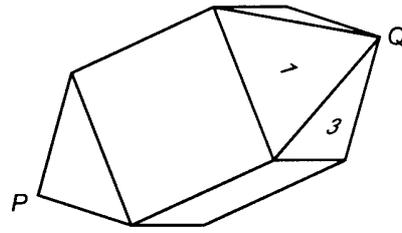
- 2.1. No dia 24 de Março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às seis e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do Sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

**Notas:**

- Recorde que, no presente ano, o mês de Fevereiro teve 29 dias.
- Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 2.2. Sem recorrer à calculadora, determine em quantos dias do ano é que o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é de 12,2 horas.

3. Na figura está representado um poliedro com doze faces, que pode ser decomposto num cubo e em duas pirâmides quadrangulares regulares.



- 3.1. Pretende-se numerar as doze faces do poliedro, com os números de 1 a 12 (um número diferente em cada face). Como se vê na figura, duas das faces do poliedro já estão numeradas, com os números 1 e 3.

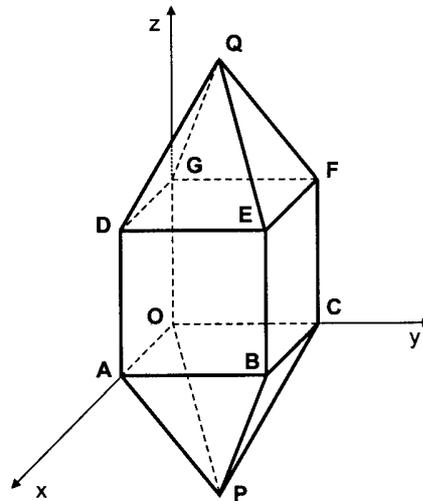
3.1.1. De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números?

3.1.2. De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números, de forma a que, nas faces de uma das pirâmides, fiquem só números ímpares e, nas faces da outra pirâmide, fiquem só números pares?

- 3.2. Considere agora o poliedro num referencial o. n.  $Oxyz$ .

Sabe-se que:

- o vértice  $O$  do poliedro é a origem do referencial;
- o vértice  $E$  do poliedro tem coordenadas  $(2, 2, 2)$ ;
- a altura de cada uma das pirâmides é igual ao comprimento da aresta do cubo.



- 3.2.1. Justifique que o ponto  $F$  não pertence à superfície esférica de diâmetro  $[PQ]$ .
- 3.2.2. Mostre que a recta  $EG$  é perpendicular ao plano  $ADQ$ .
- 3.2.3. Determine a área da secção definida no poliedro pelo plano  $ADQ$ .

**FIM**

## COTAÇÕES

**Primeira Parte.....81**

Cada resposta certa .....	+9
Cada resposta errada.....	-3
Cada questão não respondida ou anulada .....	0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

**Segunda Parte ..... 119**

1. ....	39
1.1. ....	11
1.2. ....	14
1.3. ....	14

2. ....	22
2.1. ....	10
2.2. ....	12

3. ....	58
3.1. ....	22
3.1.1. ....	7
3.1.2. ....	15
3.2. ....	36
3.2.1. ....	12
3.2.2. ....	12
3.2.3. ....	12

**TOTAL .....200**