

# EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)  
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos

2000

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

### VERSÃO 1

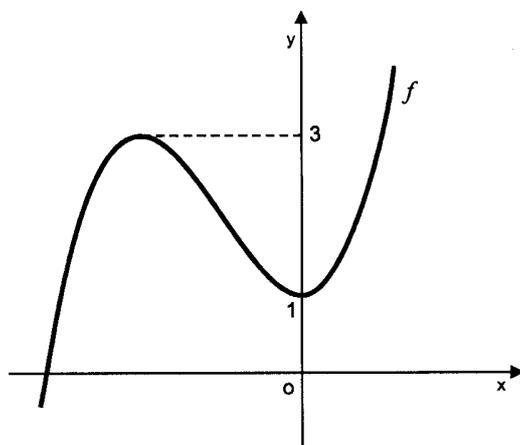
**Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.**

## Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja  $f$  uma função polinomial de terceiro grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.



Quantas são as soluções da equação  $f(x) = 2$  ?

- (A) uma                      (B) duas                      (C) três                      (D) quatro
2. Considere a função  $h$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $h(x) = \sin x$

Qual das seguintes equações pode definir uma recta tangente ao gráfico de  $h$  ?

- (A)  $y = 2x + \pi$                       (B)  $y = -2$   
(C)  $y = \sqrt{2}x - 9$                       (D)  $y = x$

3. O coeficiente de ampliação  $A$  de uma certa lupa é dado, em função da distância  $d$  (em decímetros) da lupa ao objecto, por

$$A(d) = \frac{5}{5-d}$$

Indique a que distância do objecto tem de estar a lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5.

- (A) 2 dm                    (B) 4 dm                    (C) 6 dm                    (D) 8 dm

4. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de domínio  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que:

- o gráfico de  $g$  é uma recta, que designamos por  $s$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente verdadeira** ?

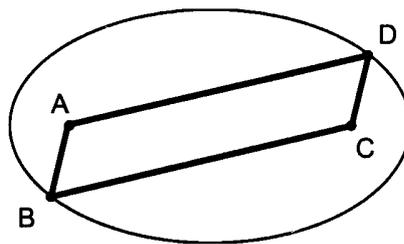
- (A) A recta  $s$  é tangente ao gráfico de  $f$   
(B) A recta  $s$  é secante ao gráfico de  $f$   
(C) A recta  $s$  não intersecta o gráfico de  $f$   
(D) A recta  $s$  é uma assíntota do gráfico de  $f$

5. Na figura junta estão representados uma elipse e um paralelogramo  $[ABCD]$ .

Os vértices  $A$  e  $C$  são os focos da elipse.

Os vértices  $B$  e  $D$  são pontos da elipse.

O perímetro do paralelogramo é 30.



Qual é o comprimento do eixo maior da elipse?

- (A) 12                    (B) 15                    (C) 18                    (D) 20

6. Considere um vector  $\overrightarrow{AB}$  tal que  $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$

Qual é o valor do produto escalar  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA}$  ?

- (A) 1                      (B) -1                      (C) 0                      (D) 2

7. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , considere os planos definidos pelas equações  $z = 1$  e  $z = 5$ .

Qual das equações seguintes define uma superfície esférica tangente aos dois planos?

(A)  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$

(B)  $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$

(C)  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$

(D)  $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 4$

8. Três rapazes e duas raparigas vão dar um passeio de automóvel.

Qualquer um dos cinco jovens pode conduzir.

De quantas maneiras podem ocupar os cinco lugares, dois à frente e três atrás, de modo a que o condutor seja uma rapariga e a seu lado viaje um rapaz?

- (A) 36                      (B) 120                      (C) 12                      (D) 72

9. Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Qual é a probabilidade de sair face 6 em exactamente um dos dois lançamentos?

- (A)  $\frac{1}{36}$                       (B)  $\frac{5}{36}$                       (C)  $\frac{1}{18}$                       (D)  $\frac{5}{18}$

## Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção:** quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 2x - \cos x$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, ou seja, **sem** utilizar a calculadora, resolva as alíneas seguintes:

- 1.1. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função  $f$  tem, pelo menos, um zero, no intervalo  $]0, \pi[$ .
- 1.2. Seja  $f'$  a função derivada de  $f$ . Mostre que  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , e justifique que o zero de  $f$ , cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.
- 1.3. A recta de equação  $y = 2x - \frac{1}{2}$  intersecta o gráfico de  $f$  em infinitos pontos. A abcissa de um desses pontos pertence ao intervalo  $[3\pi, 4\pi]$ . Determine-a.

2. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica  $P$  (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude  $h$  (em **quilómetros**), por

$$P(h) = 101 e^{-0,12h}$$

- 2.1. A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico - Açores. A altitude do cume do Pico é 2350 metros.

Qual é o valor da pressão atmosférica, nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.



- 2.2. Determine  $x$  tal que, para qualquer  $h$ ,  $P(h+x) = \frac{1}{2} P(h)$ . Apresente o resultado arredondado às décimas.

Interprete o valor obtido, no contexto do problema.

3. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus.

3.1. Num certo jogo de cartas, utiliza-se um baralho completo e dão-se treze cartas a cada jogador.

Imagine que está a participar nesse jogo.

Qual é a probabilidade de, nas treze cartas que vai receber, haver exactamente seis cartas do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

3.2. De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.

Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas ser do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura abaixo está representada, em referencial o.n.  $Oxyz$ , uma pirâmide quadrangular regular.

O vértice  $O$  é a origem do referencial

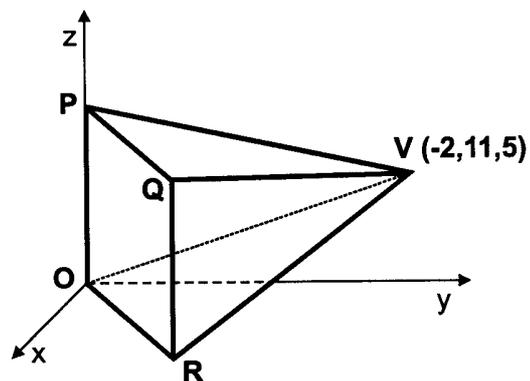
O vértice  $P$  pertence ao eixo  $Oz$

O vértice  $R$  pertence ao plano  $xOy$

O vértice  $V$  tem coordenadas  $(-2, 11, 5)$

Uma equação vectorial da recta que contém a altura da pirâmide é

$$(x, y, z) = (7, -1, 5) + k(6, -8, 0), k \in \mathbb{R}$$



4.1. Mostre que a base da pirâmide está contida no plano de equação  $3x - 4y = 0$

4.2. Justifique que o centro da base da pirâmide é o ponto de coordenadas  $(4, 3, 5)$ .

4.3. Determine o volume da pirâmide.

$$\text{Volume da pirâmide} = \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

**FIM**

## COTAÇÕES

**Primeira Parte..... 81**

|  |     |
|--|-----|
| Cada resposta certa .....                    | +9  |
| Cada resposta errada.....                    | - 3 |
| Cada questão não respondida ou anulada ..... | 0   |

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

**Segunda Parte ..... 119**

|          |    |
|----------|----|
| 1.....   | 37 |
| 1.1..... | 11 |
| 1.2..... | 13 |
| 1.3..... | 13 |

|          |    |
|----------|----|
| 2.....   | 24 |
| 2.1..... | 10 |
| 2.2..... | 14 |

|          |    |
|----------|----|
| 3.....   | 22 |
| 3.1..... | 11 |
| 3.2..... | 11 |

|          |    |
|----------|----|
| 4.....   | 36 |
| 4.1..... | 12 |
| 4.2..... | 12 |
| 4.3..... | 12 |

**TOTAL .....200**