EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.° Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.° 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada .... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 37
- **1.1.** 11
- **1.2.** 13
- **1.3.** 13

2. 24
- **2.1.** 10
- **2.2.** 14

3. 22
- **3.1.** 11
- **3.2.** 11

4. 36
- **4.1.** 12
- **4.2.** 12
- **4.3.** 12

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Versão 1	C	D	B	D	B	B	C	A	D
Versão 2	B	B	A	B	D	B	D	C	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. .... **11**

Justificar a continuidade de f em $[0, \pi]$ 1

Calcular $f(0)$ 2

Calcular $f(\pi)$ 2

Conclusão (como f é contínua em $[0, \pi]$ e como $f(0)$ e $f(\pi)$ têm sinais contrários, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe, pelo menos, um zero da função no intervalo $]0, \pi[$)................................6

1.2. .... **13**

$f'(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ 3

Justificar que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 4

$2 + \operatorname{sen} x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x > -2$ 2

Justificar que $\operatorname{sen} x > -2, \forall x \in \mathbb{R}$ 2

ou

Referir que $\operatorname{sen} x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ 2

$\operatorname{sen} x \geq -1 \Rightarrow f'(x) \geq 1$ 2

ou

Justificar que f' não tem zeros.. 2

Justificar que f' não muda de sinal 1
(por exemplo: porque f' é contínua e não tem zeros)

Concluir que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 1
(por exemplo: porque f' não muda de sinal e $f'(0) > 0$)

Concluir que f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ 3

Referir que uma função estritamente crescente não pode ter mais do que um zero 3

1.3. .... **13**

Escrever a equação $2x - \cos x = 2x - \frac{1}{2}$ 5

$2x - \cos x = 2x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ 1

$x = \frac{11\pi}{3}$ **(ver nota)** 7

Nota:

Se o examinando começar por escrever a expressão geral das soluções, em $\mathbb{R}$, da equação $\cos x = \frac{1}{2}$, os 7 pontos previstos para este passo devem ser distribuídos da seguinte forma:

Expressão geral das soluções 3
Abcissa pedida 4

2.1. .... **10**

Substituir, na expressão de $P(h)$, h por $2{,}35$ 7

$P(2{,}35) \approx 76$ 3

Notas:

1. Se o examinando substituir h por 2350, a sua resposta deverá ser cotada com um máximo de 4 pontos.

2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou se o resultado estiver mal arredondado, deverá ser penalizado em 1 ponto.

2.2. .... **14**

Determinar x tal que $P(h+x) = \frac{1}{2}\,P(h)$ 9

$$P(h+x) = \frac{1}{2}\,P(h)$$

$$\Leftrightarrow 101\,.\,e^{-0{,}12(h+x)} = \frac{1}{2}\,.\,101\,.\,e^{-0{,}12\,h} \text{ .... } 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}12\,x} = \frac{1}{2} \text{ .... } 3$$

$$\Leftrightarrow -0{,}12\,x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ .... } 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}12} \text{ .... } 1$$

Conclusão: $x \approx 5{,}8$ **(ver nota)**.. 2

Interpretar o resultado obtido 5

O examinando deverá referir que, quando se sobe 5,8 Km (em altitude), a pressão atmosférica passa para metade.

Nota:
Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às décimas, ou se o resultado estiver mal arredondado, deverá ser penalizado em 1 ponto.

3.1. .... **11**

Probabilidade pedida $= \dfrac{{}^{13}C_6 \times {}^{39}C_7}{{}^{52}C_{13}}$ **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 9

Probabilidade pedida $\approx 4\,\%$ 2

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{{}^{13}C_6 \times {}^{39}C_7}{{}^{52}C_{13}}$ (fracção correcta) 9

$\frac{{}^{13}C_6}{{}^{52}C_{13}}$ 5

Outras fracções com denominador ${}^{52}C_{13}$ 3

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 6 pontos à sua resposta.

3.2. .... **11**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Probabilidade pedida $= 1 - \frac{{}^{39}C_2}{{}^{52}C_2}$ $\left(\text{ou } 1 - \frac{{}^{39}A_2}{{}^{52}A_2}\right)$ 9

Probabilidade pedida $= \frac{15}{34}$ 2

2.º Processo:

Probabilidade pedida $=$

$= \frac{{}^{13}C_2 + 13 \times 39}{{}^{52}C_2}$ $\left(\text{ou } \frac{{}^{13}A_2 + 2 \times 13 \times 39}{{}^{52}A_2}\right)$ 9

Probabilidade pedida $= \frac{15}{34}$ 2

4.1. .... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Referir que o vector $(6, -8, 0)$ é perpendicular ao plano 2

Referir que o plano contém a origem do referencial 2

Escrever uma equação do plano, tendo em conta que o vector $(6, -8, 0)$ é perpendicular ao plano e que a origem do referencial pertence ao plano 6

Referir que a equação obtida é equivalente à equação dada 2

2.º Processo:

Referir que o vector $(3, -4, 0)$ é colinear ao vector $(6, -8, 0)$ 5

Referir que $(0, 0, 0)$ satisfaz a equação $3x - 4y = 0$ 5

Conclusão (a origem do referencial é um ponto do plano definido pela equação $3x - 4y = 0$, o vector $(6, -8, 0)$ é perpendicular a esse plano, e o plano que contém a base da pirâmide é o único que satisfaz estas duas condições) 2

4.2. .... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Mostrar que o ponto $(4, 3, 5)$ pertence ao plano que contém a base da pirâmide 4

Mostrar que o ponto $(4, 3, 5)$ pertence à recta que contém a altura da pirâmide 8

2.º Processo:

Traduzir o problema por meio de um sistema 4

Resolver o sistema 8

4.3. .... **12**

Determinar a altura da pirâmide: distância do ponto $(4,3,5)$ ao ponto $(-2,11,5)$ 5

Determinar a área da base da pirâmide 5

Determinar o volume da pirâmide 2