PROVA 135/7 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Militares**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

–

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. O conjunto dos zeros de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, é $\{1, 2\}$.
Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(x) \cdot (x-3)^2$
Quais são os zeros da função h?

(A) $1, 2$ e 3 **(B)** $1, 4$ e 9

(C) $1, \sqrt{3}$ e 4 **(D)** $-\sqrt{3},\ 1,\ \sqrt{3}$ e 2

2. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+a}$, onde a designa um certo número real.
O gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 2.
Indique o valor de a.

(A) $\ln 2$ **(B)** 2 **(C)** e^2 **(D)** $e + \ln 2$

3. De uma certa função g sabe-se que:

$$\lim_{x \to 3^-} g(x) = +\infty \qquad g(3) = 1 \qquad \lim_{x \to 3^+} g(x) = 2$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

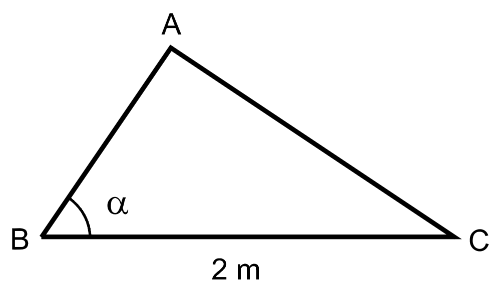
(A) O contradomínio da função g é o intervalo $[2, +\infty[$

(B) A recta de equação $x = 3$ é assimptota do gráfico da função g

(C) 3 não pertence ao domínio da função g

(D) Existe $\lim_{x \to 3} g(x)$

4. Na figura está representado um triângulo rectângulo $[ABC]$, cuja hipotenusa mede $2\ m$.



Qual das expressões seguintes dá a área (em m^2) do triângulo $[ABC]$, em função da amplitude, α, do ângulo ABC ?

(A) $2 \,.\, \operatorname{sen} \alpha \,.\, \cos \alpha$

(B) $2 \,.\, \operatorname{sen} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \alpha$

(C) $4 \,.\, \operatorname{sen} \alpha \,.\, \cos \alpha$

(D) $4 \,.\, \operatorname{sen} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \alpha$

5. Considere, num referencial o.n. xOy, uma elipse cujo eixo maior está contido no eixo Ox.

Qual das seguintes equações pode definir esta elipse?

(A) $\dfrac{x^2}{4} + (y-2)^2 = 1$

(B) $\dfrac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$

(C) $x^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

(D) $(x-2)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

6. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os pontos $P(1,0,0)$, $Q(0,1,0)$ e $R(0,0,1)$.
Qual das condições seguintes define uma recta perpendicular ao plano PQR?

(A) $x=1 \ \wedge \ y=1 \ \wedge \ z=1$

(B) $x=1 \ \wedge \ y=1$

(C) $x-1=y-2=z-3$

(D) $x+y+z=1$

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25 \quad \wedge \quad x=y$$

define

(A) uma circunferência

(B) um ponto

(C) um segmento de recta

(D) o conjunto vazio

8. Um frigorífico tem cinco prateleiras.

Pretende-se guardar, nesse frigorífico, um iogurte, um chocolate e um queijo.

De quantas maneiras diferentes se podem guardar os três produtos no frigorífico, sabendo que devem ficar em prateleiras distintas?

(A) ${}^5C_3$ **(B)** ${}^5A_3$ **(C)** 5^3 **(D)** 3^5

9. No Triângulo de Pascal, existe uma linha com onze elementos.

Seja a o maior número dessa linha.

Qual é o valor de a?

(A) ${}^{10}C_5$ **(B)** ${}^{10}C_6$ **(C)** ${}^{11}C_5$ **(D)** ${}^{11}C_6$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

1.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

1.1.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 0.
(Deve indicar, justificando, se a função g é contínua nesse ponto, e no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto).

1.1.2. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $h(x) = \dfrac{1}{3x}$

Justifique que, no intervalo $[-1, 1000\pi]$, os gráficos de g e de h intersectam-se em 1001 pontos.

1.2. Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor abcissa positiva. Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, com aproximação às décimas).

2. Em Malmequeres de Baixo, povoação com **cinco mil** habitantes, ocorreu um acidente, que foi testemunhado por algumas pessoas.

Admita que, t horas depois do acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabem do ocorrido é, aproximadamente,

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124\, e^{-0{,}3\, t}} \quad , \quad t \geq 0$$

2.1. Que percentagem da população de Malmequeres de Baixo testemunhou o acidente?

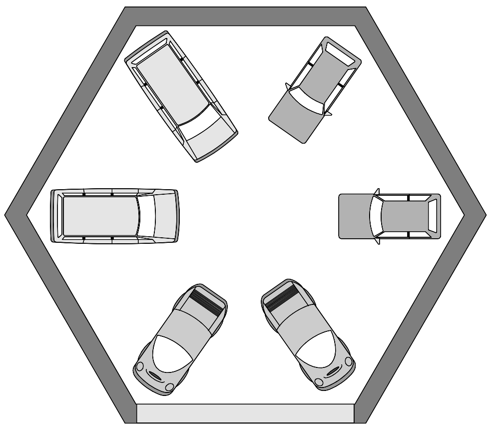
2.2. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

3. O *AUTO-HEXÁGONO* é um stand de venda de automóveis.
Num certo dia, este stand tem para exibição seis automóveis diferentes, de três tipos (dois utilitários, dois desportivos e dois comerciais).

3.1. Este stand, de forma hexagonal, tem uma montra que se situa num dos lados do hexágono (ver figura).

Pretende-se arrumar os seis automóveis, de tal forma que cada automóvel fique voltado para um vértice do hexágono.

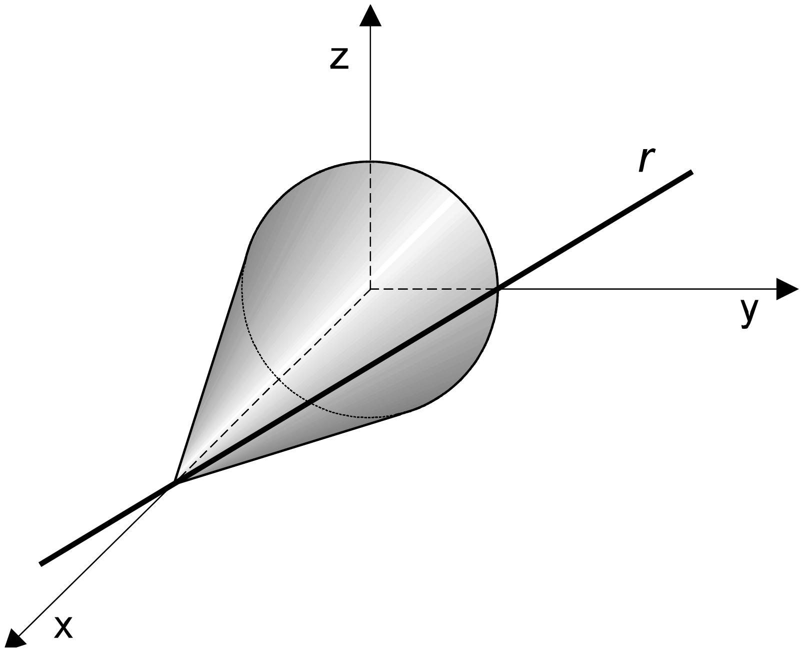
Supondo que se arrumam os seis automóveis ao acaso, qual é a probabilidade de os dois desportivos ficarem voltados para os vértices que se encontram nas extremidades da montra? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



Montra

3.2. Nesse mesmo dia, o gerente do stand pretende oferecer dois automóveis a uma instituição.
Supondo que os dois automóveis vão ser escolhidos ao acaso, de entre os seis automóveis em exibição, qual é a probabilidade de os dois automóveis seleccionados serem de tipos diferentes? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um cone cuja base está contida no plano yOz e cujo vértice pertence ao semieixo positivo Ox.
A base tem raio 3 e centro em O, origem do referencial.
A recta r, de equação $(x, y, z) = (0, 3, 0) + k\,(3, \, -1, 0), \; k \in \mathbb{R}$, contém uma geratriz do cone.



4.1. Mostre que a altura do cone é 9.

4.2. Determine uma equação do plano que contém o vértice do cone e é perpendicular à recta r.

4.3. Determine a área do polígono que resulta da intersecção do cone com o plano de equação $z = 0$.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte... **81**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 36
- **1.1.** 24
  - **1.1.1.** 11
  - **1.1.2.** 13
- **1.2.** 12

2. 25
- **2.1.** 11
- **2.2.** 14

3. 22
- **3.1.** 11
- **3.2.** 11

4. 36
- **4.1.** 12
- **4.2.** 12
- **4.3.** 12

TOTAL **200**