

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Alunos Externos e Autopropostos — alunos que obtiveram aprovação
no ano de 1999/2000 no programa «antigo» do 12.º ano

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
1.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui nove questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- As nove questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De uma função f , contínua no intervalo $[1, 3]$, sabe-se que $f(1) = 7$ e $f(3) = 4$. Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?
- (A) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[1, 3]$
(B) A função f não tem zeros no intervalo $[1, 3]$
(C) A equação $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1, 3]$
(D) A equação $f(x) = 5$ não tem solução no intervalo $[1, 3]$
2. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real positivo a , igual a $e^{2 \ln a}$?
(\ln designa logaritmo de base e)
- (A) $2a$ (B) $2 + a$ (C) 2^a (D) a^2
3. A recta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de uma certa função f , no ponto de abscissa 0. Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?
- (A) $x^2 + x$ (B) $x^2 + 2x$ (C) $x^2 + 2x + 1$ (D) $x^2 + x + 1$

V.S.F.F.

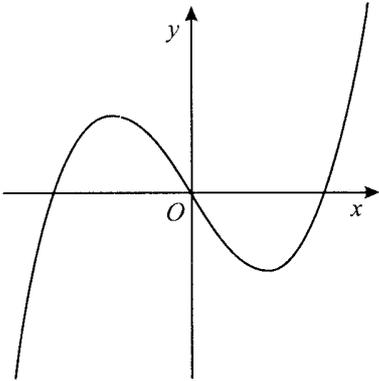
135.V1/3

4. Seja g uma função, de domínio \mathbb{R} , tal que a sua **segunda derivada** é definida por

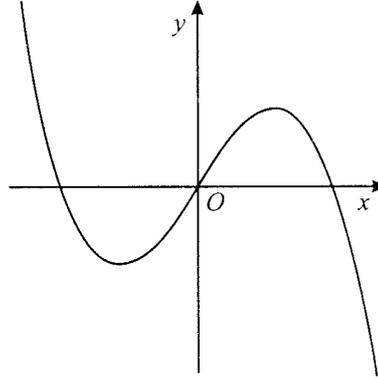
$$g''(x) = 1 - x^2$$

Em qual das figuras seguintes poderá estar parte da representação gráfica da **função g** ?

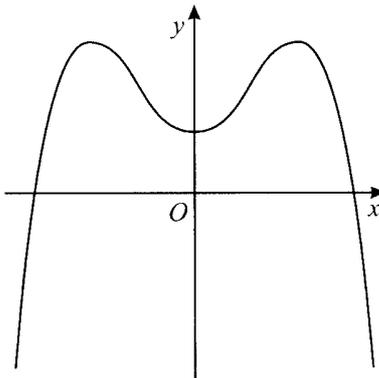
(A)



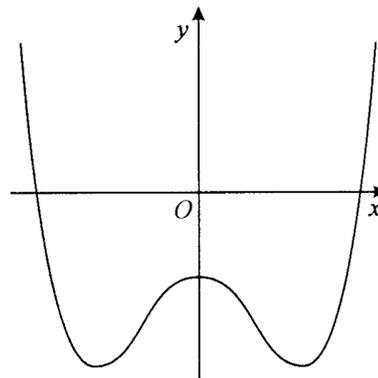
(B)



(C)



(D)

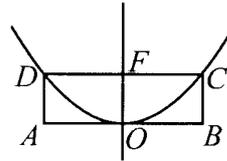


5. Qual das seguintes equações define, num referencial o. n. $Oxyz$, uma superfície esférica tangente aos planos de equações $x = 4$ e $y = 0$?

- (A) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$
 (B) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 16$
 (C) $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$
 (D) $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 16$

6. Na figura está representada parte de uma parábola, bem como um rectângulo $[ABCD]$.

- D , C e O são pontos da parábola
- $[DC]$ contém o foco F da parábola e é perpendicular ao eixo de simetria OF
- $\overline{OF} = 1$

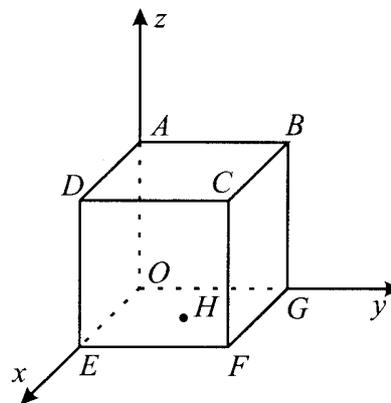


Qual é a área do rectângulo $[ABCD]$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

7. Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cubo.

- O vértice O é a origem do referencial
- O vértice A pertence ao eixo Oz
- O vértice G pertence ao eixo Oy
- O vértice E pertence ao eixo Ox
- H é o centro da face $[OGFE]$
- Uma equação do plano que contém os pontos D , B e H é $x + y = 10$



Qual é a medida da aresta do cubo ?

- (A) 5 (B) 10 (C) $5\sqrt{2}$ (D) $10\sqrt{2}$

8. *Capicua* é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número.

Por exemplo, 75957 e 30003 são *capicuas*.

Quantas *capicuas* existem com cinco algarismos, sendo o primeiro algarismo ímpar ?

- (A) 300 (B) 400 (C) 500 (D) 600

9. Quantas são as soluções da equação $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + x + 1$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

V.S.F.F.

135.V1/5

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = 3x - 2 \ln x$
(\ln designa logaritmo de base e).

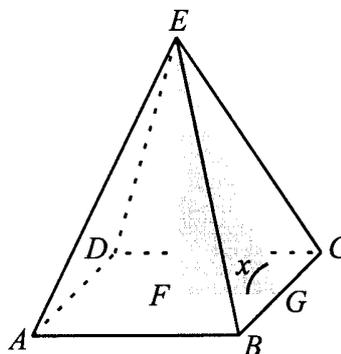
Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as três alíneas seguintes.

- 1.1. Estude f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.
- 1.2. Mostre que a função f tem um único mínimo.
- 1.3. O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é o triplo da abcissa.
Determine a abcissa desse ponto.

2. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- A base da pirâmide tem centro F e lado 2
- G é o ponto médio da aresta $[BC]$
- x designa a amplitude do ângulo FGE



- 2.1. Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de x , por

$$A(x) = \frac{4 \cos x + 4}{\cos x} \quad \left(x \in]0, \frac{\pi}{2}[\right)$$

- 2.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

- 3.** Num saco existem quinze bolas, indistinguíveis ao tacto.
Cinco bolas são amarelas, cinco são verdes e cinco são brancas.
Para cada uma das cores, as bolas estão numeradas de 1 a 5.
- 3.1.** Retirando todas as bolas do saco e dispondo-as, ao acaso, numa fila, qual é a probabilidade de as bolas da mesma cor ficarem todas juntas?
Apresente o resultado na forma de dízima, com sete casas decimais.
- 3.2.** Admita que as quinze bolas são novamente colocadas no saco.
Extraíndo simultaneamente três bolas, ao acaso, qual é a probabilidade de elas terem cores e números diferentes?
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.
- 4.** Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, duas rectas, r e s , de equações
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z \quad \text{e} \quad (x, y, z) = (1, -1, 0) + k(2, 1, -1), \quad k \in \mathbb{R},$$
respectivamente.
- 4.1.** Justifique que as rectas r e s definem um plano.
- 4.2.** Mostre que o plano definido pelas rectas r e s é paralelo ao plano de equação $x - y + z = 10$
- 4.3.** Determine a amplitude do ângulo formado pelas rectas r e s .
Apresente o resultado em graus, aproximado às unidades.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

V.S.F.F.

135.V1/7

COTAÇÕES

Grupo I81

Cada resposta certa +9
Cada resposta errada..... -3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II119

1. 37

1.1.12
1.2.13
1.3.12

2. 24

2.1.12
2.2.12

3. 22

3.1.11
3.2.11

4. 36

4.1.12
4.2.12
4.3.12

TOTAL200