

# EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)  
 Alunos Externos e Autopropostos — alunos que obtiveram aprovação  
 no ano de 1999/2000 no programa «antigo» do 12.º ano

Duração da prova: 120 minutos  
 2001

1.ª FASE  
 1.ª CHAMADA

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

### COTAÇÕES

Grupo I .....81

Cada resposta certa ..... +9  
 Cada resposta errada..... -3  
 Cada questão não respondida ou anulada ..... 0

**Nota:**

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II .....119

1. .... 37  
     1.1. ....12  
     1.2. ....13  
     1.3. ....12

2. .... 24  
     2.1. ....12  
     2.2. ....12

3. .... 22  
     3.1. ....11  
     3.2. ....11

4. .... 36  
     4.1. ....12  
     4.2. ....12  
     4.3. ....12

TOTAL .....200

V.S.F.F.

135/C/1

---

## CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

### Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Versão 1	C	D	A	C	A	C	B	C	B
Versão 2	D	A	C	A	B	C	C	B	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

### Grupo II

#### Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicitar todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

**Critérios específicos**

**1.1. ....12**

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  ..... 2

Concluir que a recta de equação  $x = 0$  é assíntota do gráfico de  $f$  ..... 1

Referir que, pelo facto de  $f$  ser contínua em  $\mathbb{R}^+$ , o seu gráfico não tem outras assíntotas verticais ..... 1

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$  ..... 3

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 \ln x) = -\infty$  ..... 3

Concluir que não existe assíntota do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$  ..... 2

**Nota:**

O examinando pode, ao estudar a existência de assíntota do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , começar por estudar a existência de assíntota horizontal. Neste caso, as cotações relativas às três últimas etapas passam a ser 2, 2 e 1 pontos, transitando os 3 pontos retirados para:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ..... 2

Concluir que não existe assíntota horizontal do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$  ..... 1

**1.2. ....13**

$f'(x) = 3 - \frac{2}{x}$  ..... 4

$3 - \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$  ..... 3

Estudar o sinal de  $f'$  (**ver nota**) ..... 4

Concluir que  $f\left(\frac{2}{3}\right)$  é o único mínimo de  $f$  (**ver nota**) ..... 2

**Nota:**

O examinando pode apresentar o estudo do sinal de  $f'$  e o estudo da monotonia de  $f$ , para concluir que  $f\left(\frac{2}{3}\right)$  é o único mínimo de  $f$ , por meio de um quadro.

**V.S.F.F.**

135/C/3

**1.3. ....12**

Equacionar o problema ( $3x - 2 \ln x = 3x$ ) .....6

$3x - 2 \ln x = 3x \Leftrightarrow \ln x = 0$  ..... 2

$x = 1$  ..... 4

**Nota:**

O examinando poderá não equacionar o problema, referindo que a abcissa pedida é 1, dado que  $3 \times 1 - 2 \ln 1 = 3 \times 1$ . Neste caso, deverá ser atribuída a cotação máxima (12 pontos).

**2.1. ....12**

$\overline{FG} = 1$  .....1

$\cos x = \frac{1}{\overline{EG}}$  ..... 2

$\overline{EG} = \frac{1}{\cos x}$  ..... 2

Área de uma face lateral =  $\frac{1}{\cos x}$  ..... 3

Área lateral =  $\frac{4}{\cos x}$  ..... 1

Área total =  $4 + \frac{4}{\cos x}$  .....2

Área total =  $\frac{4 \cos x + 4}{\cos x}$  ..... 1

**2.2. ....12**

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} A(x) = +\infty$  .....6

Interpretação (A área total pode ser tão grande quanto se queira, desde que o ângulo em questão se aproxime suficientemente do ângulo recto.) ..... 6

Escrita da fracção  $\frac{(5!)^3 \times 3!}{15!}$  (ver notas 1, 2, 3, 4 e 5) ..... 8

Probabilidade pedida = 0,0000079 (ver notas 6, 7, 8 e 9)..... 3

**Notas:**

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.

No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{(5!)^3 \times 3!}{15!}$  (fracção correcta).....8

$\frac{(5!)^3}{15!}$  ..... 5

$\frac{3! \times 5!}{15!}$  .....4

$\frac{3!}{15!}$  ..... 3

Outras fracções com denominador 15! .....2

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverá ser atribuído 1 ponto à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 6 pontos à sua resposta.

6. Se o examinando apresentar o resultado 0,000007 ou 0,000008, deverá ser penalizado em 1 ponto.

7. Se o examinando apresentar o resultado correcto na forma de dízima, mas com mais de sete casas decimais, também deverá ser penalizado em 1 ponto.

**V.S.F.F.**

135/C/5

8. Se o examinando apresentar o resultado correcto, mas na forma de notação científica (tal como é apresentado na calculadora), deverá ser penalizado em 2 pontos.
9. Qualquer outra forma de apresentação do resultado final deverá ser cotada com 0 pontos.

**3.2. ....11**

Número de casos possíveis =  ${}^{15}C_3$   
 Número de casos favoráveis =  $5 \times 4 \times 3$   
 Probabilidade pedida =  $\frac{12}{91}$

As cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção $\frac{5 \times 4 \times 3}{{}^{15}C_3}$ (ver notas 1, 2, 3, 4 e 5) .....	10
Resultado final .....	1

**Notas:**

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.  
 No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.
2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{5 \times 4 \times 3}{{}^{15}C_3}$  (fracção correcta)..... 10

Outras fracções com denominador  ${}^{15}C_3$  ..... 3

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.
4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.
5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 7 pontos à sua resposta.

**4.1. .... 12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

**1.º Processo:**

- Referir que o ponto  $(1, -1, 0)$  pertence às rectas  $r$  e  $s$  ..... 4
- Mostrar que as rectas  $r$  e  $s$  não têm a mesma direcção ..... 4
- Concluir que as rectas  $r$  e  $s$  são concorrentes ..... 3
- Concluir que as rectas  $r$  e  $s$  definem um plano ..... 1

**2.º Processo:**

- Escrever uma condição cartesiana que defina a recta  $s$  ..... 2
- Resolver o sistema formado pelas condições cartesianas que definem as rectas  $r$  e  $s$  ..... 6
- Concluir que as rectas  $r$  e  $s$  são concorrentes ..... 3
- Concluir que as rectas  $r$  e  $s$  definem um plano ..... 1

**4.2. .... 12**

Encontrar um vector normal às rectas  $r$  e  $s$  (ou mostrar que o vector  $(1, -1, 1)$  é perpendicular às rectas  $r$  e  $s$ ) ..... 7

Justificar que o plano definido pelas rectas  $r$  e  $s$  é paralelo ao plano de equação  $x - y + z = 10$  ..... 5

**4.3. .... 12**

$$\cos \alpha = \frac{|2 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \times \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} \dots\dots\dots 4$$

$\cos \alpha \approx 0,65$  ..... 4

$\alpha \approx 49^\circ$  ..... 4

**Nota:**

Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou se o arredondamento estiver incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto.