

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Alunos Externos e Autopropostos — alunos que obtiveram aprovação
no ano de 1999/2000 no programa «antigo» do 12.º ano

Duração da prova: 120 minutos
2001

2.ª FASE
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique
claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a
anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui nove questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- As nove questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Para um certo valor de k , é contínua em \mathbb{R} a função f definida por

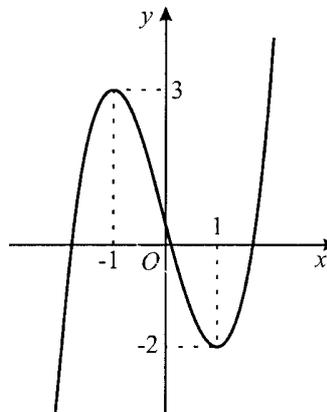
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(x + k) & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Qual é o valor de k ?

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

2. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g , polinomial do terceiro grau.

A função g admite máximo relativo igual a 3 para $x = -1$ e admite mínimo relativo igual a -2 para $x = 1$.



Qual é o conjunto dos valores de b para os quais a equação $g(x) = b$ tem três soluções distintas?

- (A) $] -\infty, 3[$ (B) $] -2, +\infty[$ (C) $[-2, 3]$ (D) $] -2, 3[$

V.S.F.F.

135.V1/3

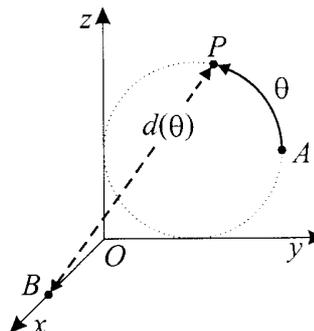
3. Seja f uma função tal que a sua derivada, no ponto 3, é igual a 4.

Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 4 (D) 0

4. Na figura estão representados, em referencial o.n. $Oxyz$:

- uma circunferência de raio 1, centrada no ponto $(0, 1, 1)$ e contida no plano yOz
- o ponto $A(0, 2, 1)$
- o ponto B , pertencente ao semieixo positivo Ox

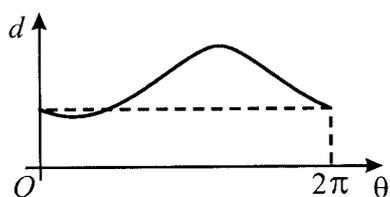


Considere que um ponto P , partindo de A , se desloca sobre essa circunferência, dando uma volta completa, no sentido indicado na figura.

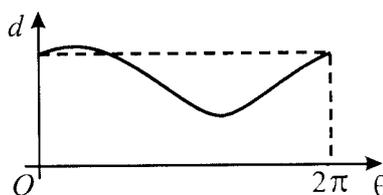
Para cada posição do ponto P , seja θ a amplitude, em radianos, do arco AP ($\theta \in [0, 2\pi]$) e seja $d(\theta)$ a distância de P ao ponto B .

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d ?

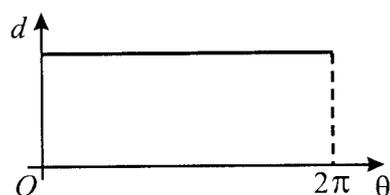
(A)



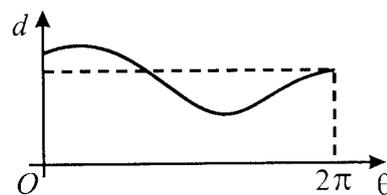
(B)



(C)



(D)



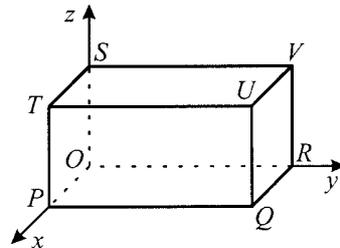
5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um plano α , de equação $x + 2y - z = 2$.
Seja β o plano que é paralelo a α e que contém o ponto $(0, 1, 2)$.

Qual das condições seguintes é uma equação do plano β ?

- (A) $x + 2y - z = 1$ (B) $x + z = 2$
(C) $-x - 2y + z = 0$ (D) $x - y + z = 1$

6. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo rectângulo.

- O vértice O é a origem do referencial.
O vértice P pertence ao eixo Ox .
O vértice R pertence ao eixo Oy .
O vértice S pertence ao eixo Oz .
O vértice U tem coordenadas $(2, 4, 2)$.



Seja r a recta de equação $(x, y, z) = (2, 0, 2) + k(0, 0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

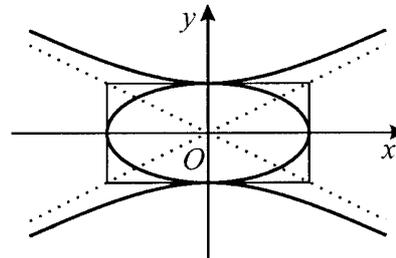
Qual é o ponto de intersecção da recta r com o plano OUV ?

- (A) O ponto P (B) O ponto T (C) O ponto U (D) O ponto V

7. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy , uma elipse, inscrita num rectângulo, e parte de uma hipérbole.

As assíntotas da hipérbole, representadas a tracejado, contêm as diagonais do rectângulo.

Os vértices da hipérbole coincidem com dois dos vértices da elipse.



Uma equação da elipse é $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Qual das condições seguintes é uma equação da hipérbole?

- (A) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (B) $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$
(C) $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ (D) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

V.S.F.F.

135.V1/5

8. Num certo país existem três empresas operadoras de telecomunicações móveis: A, B e C. Independentemente do operador, os números de telemóvel têm nove algarismos. Os números do operador A começam por 51, os do B por 52 e os do C por 53.

Quantos números de telemóvel constituídos só por algarismos ímpares podem ser atribuídos nesse país?

- (A) 139 630 (B) 143 620 (C) 156 250 (D) 165 340

9. Considere:

- uma caixa com nove bolas, indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 9;
- um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Lança-se o dado e tira-se, ao acaso, uma bola da caixa.

Qual é a probabilidade de os números saídos serem ambos menores que 4?

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{5}{27}$ (D) $\frac{5}{54}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Um petroleiro, que navegava no oceano Atlântico, encalhou numa rocha e sofreu um rombo no casco. Em consequência disso, começou a derramar crude. Admita que, às t horas do dia a seguir ao do acidente, a área, em km^2 , de crude espalhado sobre o oceano é dada por

$$A(t) = 16 e^{0,1t}, \quad t \in [0, 24]$$

- 1.1. Verifique que, para qualquer valor de t , $\frac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante.

Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às décimas) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

- 1.2. Admita que a mancha de crude é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou. Sabendo que esse local se encontra a sete quilómetros da costa, determine a que horas, do dia a seguir ao do acidente, a mancha de crude atingirá a costa.

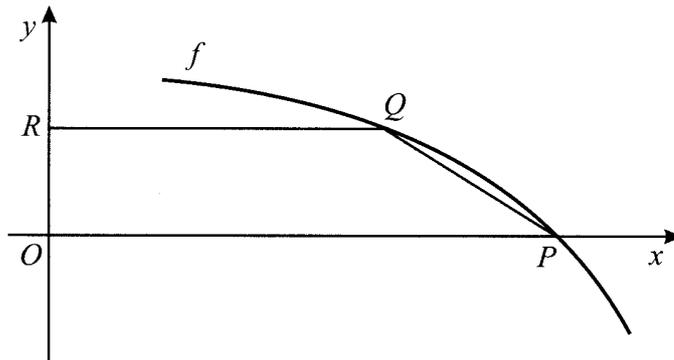
Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Considere a função f , de domínio $] -\pi, \pi [$, definida por $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$

Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

- 2.1. Estude a função quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.
- 2.2. Mostre que a função f tem um máximo e determine-o.
- 2.3. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , uma parte do gráfico da função f .



Na mesma figura está também representado um trapézio $[OPQR]$. O ponto O é a origem do referencial, e os pontos P e R pertencem aos eixos Ox e Oy , respectivamente. Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f .

Sabendo que o ponto R tem ordenada $\frac{1}{3}$, determine a área do trapézio.

3. Uma turma do 12.º ano é constituída por vinte e cinco alunos (quinze raparigas e dez rapazes). Nessa turma, vai ser escolhida uma comissão para organizar uma viagem de finalistas.

A comissão será formada por três pessoas: um **presidente**, um **tesoureiro** e um responsável pelas **relações públicas**.

- 3.1. Se o delegado de turma tivesse obrigatoriamente de fazer parte da comissão, podendo ocupar qualquer um dos três cargos, quantas comissões distintas poderiam ser formadas?

- 3.2. Admita agora que o delegado de turma pode, ou não, fazer parte da comissão. Quantas comissões mistas distintas podem ser formadas?

Nota: Entenda-se por comissão mista uma comissão constituída por jovens que não são todos do mesmo sexo.

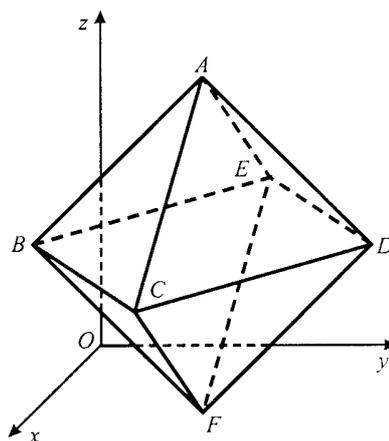
V.S.F.F.

135.V1/7

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:

- o vértice B tem coordenadas $(1, 0, 1)$
- o vértice E tem coordenadas $(0, 1, 1)$
- o vértice F pertence ao plano xOy
- o vértice A tem coordenadas $(1, 1, 2)$



- 4.1. Mostre que a recta definida pela condição $x = y = z$ é perpendicular ao plano ACD .
- 4.2. Determine uma equação da superfície esférica que contém os seis vértices do octaedro.
- 4.3. Seja α o plano definido pelo eixo Oz e pelo ponto A .
A secção produzida no octaedro pelo plano α é um quadrilátero.
Caracterize esse quadrilátero e determine o seu perímetro.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I81

Cada resposta certa +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II119

1. 24

1.1. 12

1.2. 12

2. 37

2.1. 12

2.2. 13

2.3. 12

3. 22

3.1. 11

3.2. 11

4. 36

4.1. 12

4.2. 12

4.3. 12

TOTAL 200